

## 7. EVOLUTION DES BANDES DE LOCALISATION – FORMATION DE LIGNES DE RUPTURE

Les chapitres précédents ont analysé d'abord les structures d'hétérogénéité compatibles avec l'Approche Energétique, indépendamment de la question de leur développement, puis le développement d'hétérogénéités, indépendamment de leur structure.

Dans ce qui suit, en utilisant l'ensemble des résultats précédents, nous montrerons que sous sollicitation monotone:

- dans un domaine soumis à un mouvement de cisaillement monotone, la structure d'une bande de localisation simple définie au Chapitre 4, aura tendance à évoluer vers la concentration maximale, comme conséquence des conditions de développement de l'hétérogénéité vues au Chapitre 6;
- un mouvement de cisaillement distribué sur un système de bandes de localisation aura tendance à évoluer vers une bande de localisation unique, avec amplification maximale dans l'axe de la bande.

Autrement dit, les conditions obtenues impliquent un résultat, largement constaté dans la pratique: un mouvement de cisaillement monotone conduit à la formation de bandes de localisation, qui, plutôt que demeurer diffuses en structure ou en nombre, se concentrent progressivement en lignes de ruptures isolées (*pourvu que les conditions aux limites le permettent..*).

### 7.1 CADRE ANALYTIQUE

En toute rigueur, lorsque des hétérogénéités macroscopiques se développent, le raisonnement quantitatif de la section 6.1 sur la dispersion "marginale" dans le domaine matériel, n'est plus directement applicable.

Toutefois, un raisonnement qualitatif demeure possible, pourvu que la variation seconde du taux de dissipation spécifique demeure du même signe au cours du mouvement, c'est à dire  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ , ce qui est généralement le cas sous sollicitation monotone, et sous conditions aux limites régulières, sans restrictions cinématiques trop rigides.

Dans une telle configuration, entre deux mouvements hétérogènes qui donneraient le même taux de dissipation calculé sur les valeurs moyennes, le milieu tendra à évoluer vers celui qui minimise (au sens algébrique) les termes de second ordre de Variance et de Covariance de l'équation (6.1), comme conséquence de la Règle de moindre dissipation.

Pour les structures de localisation en déformation plane analysées Chapitre 4, le taux de dissipation spécifique moyen, hors termes du second ordre, est égal au produit de la contrainte moyenne de cisaillement qui s'exerce parallèlement à la bande dans le domaine matériel, multipliée par le taux de cisaillement moyen  $\bar{\dot{\gamma}}$  dans le domaine, multipliés enfin par le volume spécifique. Si nous comparons des schémas différents de déformation hétérogènes pour lesquels ces trois paramètres moyens sont identiques, ce que nous ferons par la suite, l'équivalence est effectivement assurée en termes de taux de dissipation, hors termes du second ordre.

Restent à évaluer ces termes de 2<sup>ème</sup> ordre, dans le cadre des structures de localisation analysées au Chapitre 4.

Nous avons vu en section 6.2 que la déformation spécifique  $E(D, t_0, t)$  et le volume spécifique  $\bar{v}_s$  sont des variables internes pertinentes. Remarquons d'abord que pour les situations de déformation plane étudiées Chapitre 4, notre déformation spécifique  $E$  s'exprime en fonction du taux de cisaillement moyen  $\bar{\dot{\gamma}}$  :

$$E(D, t_0, t) = \frac{1}{m_D} \int_{t_0}^t \left\{ \int_D \frac{1}{2} [N_{\parallel} \{ \dot{\underline{\epsilon}} \}] dv \right\} d\tau = \frac{1}{m_D} \int_{t_0}^t \left\{ \int_D \frac{1}{2} [\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3] dv \right\} d\tau$$

Ou encore 
$$E(D, t_0, t) = \int_{t_0}^t \bar{v}_s(D) \cdot \bar{\dot{\gamma}}(D) d\tau \quad (7.1)$$

de plus, nous avons vu (section 4.1.4) que le cisaillement nominal  $\Gamma$  est lié à  $\bar{\dot{\gamma}}$

par  $\int_{t_0}^t \bar{\dot{\gamma}}(D) d\tau = \bar{\Gamma}(D)$ , pourvu que les déformations volumiques demeurent négligeables

devant l'ampleur des déformations de cisaillement, auquel cas on aura finalement :

$$E(D, t_0, t) \approx \bar{v}_s(D, t_0, t) \cdot \bar{\Gamma}(D) \quad (7.2)$$

Par ailleurs il s'avère en effet que les variabilités respectives de ces grandeurs ne sont pas du même ordre:

- d'après les mesures tomographiques de Desrues et al. [6], des données de l'auteur, ou encore des mesures micrométriques de Cresswell et Powrie [33], l'écart relatif sur les volumes spécifiques au cours du mouvement avec localisation, est de l'ordre de  $\frac{v_{s \text{ Max}} - v_{s \text{ min}}}{v_{s \text{ moyen}}} \approx 12\% \text{ à } 23\%$ ,
- d'après les mesures micrométriques de Nemat-Nasser et al. [9], l'écart relatif sur les cisaillements nominaux au cours du mouvement avec localisation, est de l'ordre de  $\frac{\Gamma_{\text{Max}} - \Gamma_{\text{min}}}{\Gamma_{\text{moyen}}} \approx 540\%$ , soit environ 20 à 50 fois plus fort;
- si ces deux variables présentaient des distributions approximativement homothétiques, la proportion entre leurs variances respectives serait de l'ordre du carré du rapport entre les écarts relatifs, c'est à dire que la variance sur les cisaillements nominaux serait de 500 à 2000 fois plus forte que la variance sur les volumes spécifiques.

Ces éléments montrent que:

- a) parmi les variables pertinentes, la variable principale est  $E(D, t_0, t)$ ;
- b) le terme principal de variance dans (7.1) est  $Var(E)$ ;

-c) le terme principal de cette variance de  $E(D, t_0, t)$ , est  $Var(E) \approx \bar{v}_s^2 \cdot Var(\Gamma)$ . Enfin si nous comparons des schémas stationnaires, pour lesquels

$$\bar{\Gamma}_{(D)} = \int_{t_0}^t \bar{\dot{\gamma}}_{(D)} d\tau \approx (t - t_0) \cdot \bar{\dot{\gamma}}_{(D)}, \text{ nous aurons finalement}$$

$$Var(E) \approx \bar{v}_s^2 \cdot (t - t_0)^2 \cdot Var(\dot{\gamma}) \quad (7.3)$$

**En conséquence, tant que  $\frac{\delta^2 \bar{\omega}}{\delta E^2} < 0$ , parmi les schémas stationnaires admissibles, le mouvement tendra vers celui qui maximise  $Var(\dot{\gamma})$**

## 7.2 EVOLUTION D'UNE BANDE DE LOCALISATION SIMPLE

Considérons une bande de localisation simple dans un domaine matériel de largeur  $L$ , dans un champ de cisaillement homogène, du type considéré en section 4.1.3:

$\dot{\gamma}_{(x_3)} = [\dot{\gamma}_{Max} - \dot{\gamma}_l] \cdot \exp(-kx_3) + \dot{\gamma}_l$ , avec  $\frac{kL}{2}$  grand devant 1. En rapportant les taux de cisaillement à la valeur moyenne, nous obtenons (voir section 4.3.1):

$$\dot{\gamma}_{(x_3)} = \bar{\dot{\gamma}} \left\{ \left[ \frac{\dot{\gamma}_{Max}}{\bar{\dot{\gamma}}} - \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \right] \cdot \exp(-kx_3) + \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \right\}, \text{ avec } \frac{\dot{\gamma}_{Max}}{\bar{\dot{\gamma}}} - \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \square \frac{kL}{2} \left( 1 - \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \right) \text{ où}$$

$$0 \leq \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \leq 1; \text{ d'où l'on tire } \dot{\gamma}_{(x_3)} - \bar{\dot{\gamma}} \square \bar{\dot{\gamma}} \cdot \left( 1 - \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \right) \left\{ \frac{kL}{2} \cdot \exp(-kx_3) - 1 \right\}$$

Sur la demi-bande de largeur  $L/2$ , nous pouvons calculer directement la variance du taux de cisaillement:

$$Var(\dot{\gamma}) = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} [\dot{\gamma}(x_3) - \bar{\dot{\gamma}}]^2 dx_3 \approx \bar{\dot{\gamma}}^2 \cdot \left( 1 - \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \right)^2 \cdot \left( \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (7.4)$$

$$\text{avec } 0 \leq \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \leq 1$$

A taux de cisaillement moyen  $\bar{\dot{\gamma}}$  imposé sur le domaine, la configuration qui maximise  $Var(\dot{\gamma})$  sera donc pour  $\frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} = 0$ , c'est à dire lorsque la bande atteint son degré

maximal de concentration, avec au centre de la bande  $\frac{\dot{\gamma}_{Max}}{\bar{\dot{\gamma}}} \approx \frac{kL}{2}$  (voir section 4.3.1),

et à l'extérieur de la bande, une déformation de cisaillement qui "s'éteint", car  $\dot{\gamma}_l$  tend vers 0.

En résumé, les conditions du §6.1 font que, tant que  $\frac{\delta^2 \bar{\omega}}{\delta E^2} < 0$ :

**lorsque une bande de localisation simple s'installe dans un domaine soumis à un taux de cisaillement moyen imposé, cette bande de localisation tend vers la concentration maximale, ce qui s'accompagne d'une extinction des déformations à l'extérieur de la bande-**

Sur la Figure 4-7, l'évolution se fait donc de la situation (a) vers la situation (c).

### 7.3 EVOLUTION D'UNE FAMILLE DE BANDES DE LOCALISATION PARALLELES

Considérons maintenant un ensemble de  $n$  bandes de localisation parallèles dans un domaine matériel de largeur  $L$  soumis à un taux de cisaillement moyen imposé  $\bar{\dot{\gamma}}$ , ces bandes ayant atteint séparément leur degré de concentration maximal et occupant des largeurs inégales  $L_i$ , avec  $\sum L_i = L$ .

Pour l'une de ces bandes, la variance vaudra (2 demi-bandes)

$$Var(\dot{\gamma}) = \frac{1}{L_i} \cdot 2 \cdot \int_0^{L_i/2} [\dot{\gamma}(x_3) - \bar{\dot{\gamma}}]^2 dx_3 \approx \frac{1}{L_i} \cdot \bar{\dot{\gamma}}^2 \cdot \left( \frac{kL_i^2}{2} - L_i \right)$$

Et pour l'ensemble des  $n$  bandes sur la largeur totale  $L$ , la variance vaudra:

$$Var(\dot{\gamma}, n) = \frac{1}{L} \sum_1^n \left\{ 2 \cdot \int_0^{L_i/2} [\dot{\gamma}(x_3) - \bar{\dot{\gamma}}]^2 dx_3 \right\} \approx \frac{\bar{\dot{\gamma}}^2}{L} \sum_1^n \left( \frac{kL_i^2}{2} - L_i \right) \text{ qui devient}$$

$$Var(\dot{\gamma}, n) \approx \bar{\dot{\gamma}}^2 \left[ \frac{kL}{2} \cdot \sum_1^n \left( \frac{L_i}{L} \right)^2 - 1 \right] \quad (7.5)$$

On montre (Annexe 7-1) que le terme de la sommation est toujours compris entre:

- une valeur maximale qui vaut 1, lorsque  $n=1$ , c'est à dire lorsque l'ensemble se réduit à une seule bande de concentration maximale, ce qui se produit lorsque toutes les bandes, sauf une, se réduisent à des largeurs et des intensités négligeables;
- une valeur minimale qui vaut  $1/n$ , lorsque les  $n$  bandes sont de largeur et d'intensité égales.

La configuration qui maximise  $Var(\dot{\gamma})$  correspond donc à la réduction de l'ensemble à une seule bande.

En résumé, les conditions du §6.1 font que, tant que  $\frac{\delta^2 \bar{\dot{\omega}}}{\delta E^2} < 0$ :

**lorsque un ensemble de bandes de localisation parallèles s'installe dans un domaine soumis à un taux de cisaillement moyen imposé, cet ensemble tendra vers la concentration de tous les cisaillements dans une seule bande ( elle même de concentration maximale), ce qui s'accompagnera d'une extinction des déformations à l'extérieur de la bande- Figure 7-1-**

## 7.4 CONCLUSIONS: FORMATION DE LIGNES DE RUPTURE

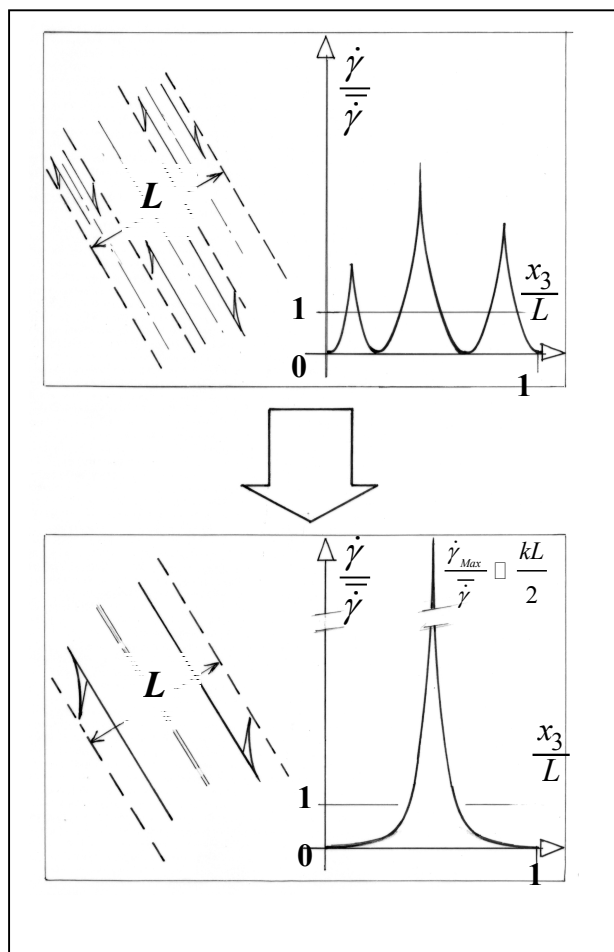
Les résultats précédents montrent que, tant que  $\frac{\delta^2 \bar{\dot{\omega}}}{\delta E^2} < 0$ , et pourvu que les conditions aux limites soient compatibles avec la localisation, l'application de la Règle de moindre dissipation aux configurations de déformation hétérogènes avec bandes de localisation, a pour conséquences:

- une bande de localisation dans un champ homogène tendra vers la concentration maximale de tous les mouvements dans la bande;
- un ensemble de bandes parallèles, avec concentration maximale dans chacune des bandes, tendra vers la concentration de tous les cisaillements dans une seule bande de localisation, elle-même de concentration maximale;
- dans les deux cas, cette concentration des cisaillements dans la bande de localisation s'accompagne d'une extinction des déformations à l'extérieur de la bande.

Ce schéma de concentration des cisaillements dans une bande simple, avec extinction des déformations à l'extérieur, vu à grande échelle, correspond à la formation d'une quasi-discontinuité (la bande schématisée par une ligne) séparant deux masses "gelées dans le mouvement" (extinction des déformations à l'extérieur de la bande), c'est à dire concrètement *la formation d'une ligne de rupture*.

**Figure 7-1 Evolution d'une famille de bandes de localisation parallèles.**

. Mouvements d'ensemble      Profils des taux de cisaillement



## CONCLUSIONS

L'application de l'Approche Energétique à la localisation des déformations et aux chaînons de contraintes permet donc en effet d'entrer en profondeur dans la physique particulière de ces phénomènes. Elle en donne une vision renouvelée, menant à un large ensemble de résultats nouveaux, et tout particulièrement ceux concernant la structure interne des bandes de localisation, le critère énergétique d'initiation de la localisation, et enfin le mécanisme de formation de lignes de rupture.

Cet ensemble de résultats nouveaux, conformes aux indications expérimentales, confirme l'intérêt de l'Approche Energétique, comme méthode de physique statistique, spécifique aux milieux granulaires.

La clef de ces résultats se trouve dans l'analyse de la compatibilité avec l'hétérogénéité (chapitres 1 et 2), qui revient en fait à résoudre un problème d'homogénéisation par une méthode originale. Cette analyse montre toute la force du concept des *actions intérieures*, qui permet de rentrer simplement dans la problématique des hétérogénéités simultanées en contraintes et vitesses de déformations, dans le cas général (section 2.2), ce concept est un des apports-clés de l'Approche Energétique.

Cette large compatibilité de l'Approche Energétique avec l'hétérogénéité, permet ensuite de jongler directement entre le discontinu et le continu équivalent : les résultats sur la structure interne des bandes de localisation (sections 4.1 et 4.2) en sont une première illustration. Une deuxième en est donnée par l'application directe des conditions statistiques du développement de l'hétérogénéité, à l'évolution des structures de bandes de localisation vers la formation de lignes de rupture (chapitres 6 et 7).

Soulignons qu'*aucune intervention de discontinuité macroscopique*, d'ordre cinématique, statique, ou de bifurcation dans le comportement mécanique, n'a été nécessaire pour établir ces résultats.

Ce paradoxe apparent est une simple conséquence de *l'origine* de l'Approche Energétique: provenant de la physique statistique du discontinu, la structure interne de ses équations inclut dès l'origine, ce qui est nécessaire pour obtenir simplement ces résultats. En particulier, la *linéarité par morceaux* des termes de l'équation de dissipation, la rend compatible avec un large ensemble d'hétérogénéités, aussi fortes que l'on voudra, pourvu qu'elles vérifient les conditions de compatibilité (2.10).

Des discontinuités cinématiques ou statiques peuvent sans aucun doute se manifester dans certaines circonstances, les résultats établis dans ces pages montrent que leur intervention n'est pas une condition *sine qua non*.

Soulignons également que les conditions statistiques de développement de l'hétérogénéité, et leurs conséquences jusqu'à la formation de lignes de rupture (Sections 6.1 et 7.1) constituent, dans leur principe, un processus physique générateur de lignes de rupture, de portée assez générale:

- il suffit que le milieu obéisse à la Règle de moindre dissipation;
- que son comportement mécanique contienne une variable interne pertinente en déformation du type de  $E$  ;
- et que ce comportement mécanique, au cours d'une sollicitation monotone, soit tel que  $\frac{\delta^2 \bar{\omega}}{\delta E^2} < 0$ , ce qui semble le cas de la plupart des géomatériaux.

Dans de telles conditions, le milieu évoluera vers des configurations du mouvement qui maximisent  $Var(E)$ , c'est à dire, en déformation plane, vers des mouvements présentant de fortes hétérogénéités stationnaires en cisaillement, qui maximisent  $Var(\dot{\gamma})$ . La compatibilité cinématique entre de telles concentrations de cisaillement imposant leur ordonnancement en structures linéaires, on retrouve ici un ensemble de conditions assez générales conduisant à la formation des "shearbands" évoquées en Introduction. Ce processus d'évolution vers les lignes de rupture correspond précisément aux résultats publiés dernièrement par G.Gudehus et K.Nübel [36], qui comparent des mécanismes de déformation expérimentaux, à des modélisations numériques fines intégrant l'ensemencement de modèles élaborés aux éléments finis, par une distribution statistique de fluctuations locales (*en densité, dans leur modèle particulier*).

Ces résultats indiquent une initiation particulièrement précoce de la localisation au cours du mouvement, bien avant les effets de "pic" de résistance, ce qui est conforme aux données publiées dans la littérature. Ils suggèrent par ailleurs que ces effets de "pic" peuvent être considérés davantage comme *conséquence* du développement de la localisation, plutôt que comme une *cause*. Ce point de vue explique alors pourquoi ces effets de "pic" sont aussi sensibles aux circonstances expérimentales, et en particulier aux conditions aux limites, suivant qu'elles permettent ou non le plein développement de la localisation.

Les développements présentés dans ces pages reposent sur des hypothèses, souvent d'ordre statistique. Leur validité pourra sans doute être bientôt contrôlée, par les progrès rapides des méthodes de simulation numériques utilisant la mécanique d'ensembles de particules discrètes, et qui permettent déjà des simulations avec des granulats virtuels réalistes, tels les remarquables résultats de C.Nouguier-Lehon, B.Cambou et al. [37].

## ANNEXES

## ANNEXES AU CHAPITRE 1

## Annexe 1-1 Rappels sur l'Approche Energétique (voir [17])

L'Approche Energétique établit un ensemble de propriétés *macroscopiques* du comportement mécanique, à partir de propriétés *microscopiques*, structurées par les lois de la dissipation d'énergie mécanique par friction. Nous en résumons ici les bases, en insistant sur certaines notions nécessaires au développement du texte principal.

## 1-1-1 Contact élémentaire

- La principale de ces structures locales est l'existence du « tenseur d'actions de contact élémentaires », qui, pour un contact  $c$  glissant avec une vitesse de glissement  $\vec{v}_{(c)}$ , sous un effort de contact  $\vec{f}_{(c)}$ , s'exprime par :

$$\underline{\mathbf{p}}_{(c)} = \frac{1}{2} \left[ \vec{v}_{(c)} \otimes \vec{f}_{(c)} + \vec{f}_{(c)} \otimes \vec{v}_{(c)} \right]$$

Le tenseur symétrique et du 2<sup>nd</sup> ordre qui en résulte est un tenseur plan, dont les directions propres sont les bissectrices des directions de  $\vec{v}_{(c)}$  et  $\vec{f}_{(c)}$ , et de signature (+,0,-).

- Ces tenseurs d'actions de contact ont deux propriétés remarquables :
  - leurs **Traces** sont les puissances mécaniques développées par les actions de contact

$$Tr\{\underline{\mathbf{p}}_{(c)}\} = \vec{v}_{(c)} \cdot \vec{f}_{(c)};$$

- leurs **valeurs propres** se trouvent liées par une relation linéaire simple, résultant des lois de la friction, qui est l'équation de la dissipation par friction au contact élémentaire

$$Tr\{\underline{\mathbf{p}}_{(c)}\} = \sin \psi \cdot N_{\parallel} \{\underline{\mathbf{p}}_{(c)}\}$$

(où la norme  $N_{\parallel}$  est la somme des valeurs absolues des valeurs propres  $N_{\parallel} \{\underline{\mathbf{p}}\} = \sum |\mathbf{p}_i|$ , et  $\psi$  l'angle de friction physique au contact).

- Considérant le contact élémentaire comme un système physique, les valeurs propres de  $\underline{\mathbf{p}}$  s'interprètent comme des flux d'énergie mécanique échangés par notre "système" avec le milieu extérieur, flux dont le sens est déterminé par le signe de ces valeurs propres:
  - une *puissance reçue*, et une *puissance rendue*, peuvent alors être définies à partir des valeurs propres par :

$$\begin{cases} \mathbf{p}^+ = \frac{1}{2} [\sum \mathbf{p}_i + \sum |\mathbf{p}_i|] \text{ puissance reçue} \\ \mathbf{p}^- = \frac{1}{2} [\sum \mathbf{p}_i - \sum |\mathbf{p}_i|] \text{ puissance rendue} \end{cases}$$

- l'équation de dissipation par friction se met alors sous la forme équivalente:

$$\frac{\mathbf{p}^+}{\mathbf{p}^-} = -\frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}$$

- considéré comme un système physique, le contact élémentaire apparaît comme une sorte de transformateur, recevant de l'énergie d'un côté, en rendant de l'autre, tout en ayant dissipé l'essentiel au passage, le tout en proportions fixées.

Dans son repère propre, en tenant compte des lois de la friction, ce tenseur s'écrit :

$$\underline{\mathbf{p}}_{(c)} = \|\vec{f}_{(c)}\| \cdot \|\vec{v}_{(c)}\| \begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}) \end{bmatrix}$$



ou encore sous la forme équivalente

$$\underline{\mathbf{p}}(c) = \frac{Tr\{\underline{\mathbf{p}}(c)\}}{2\sin\psi} \begin{bmatrix} 1 + \sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \sin\psi) \end{bmatrix}$$

### 1-1-2 Amas granulaire

• Le passage à l'amas granulaire discontinu, amène naturellement à considérer le “tenseur des actions intérieures de l'amas granulaire”  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$ , symétrique et du 2<sup>nd</sup> ordre, qui résulte de la somme de tous les tenseurs des actions de contact élémentaires contenus dans l'amas granulaire  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{p}}(c)$ .

• Ce tenseur des actions intérieures de l'amas granulaire, présente lui aussi des propriétés remarquables:  
- sa **Trace** est la puissance développée par l'ensemble des efforts intérieurs (pourvu que les granulats soient indéformables), car  $Tr\{\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})\} = \sum_{\mathbf{A}} Tr\{\underline{\mathbf{p}}(c)\}$  ;  
- ses valeurs propres peuvent encore s'interpréter comme des flux d'énergie mécanique échangés avec le milieu extérieur; et l'on peut encore définir globalement une *puissance reçue* par l'amas granulaire, et une *puissance rendue* par l'amas granulaire,  $\mathbf{P}^+(\mathbf{A})$  et  $\mathbf{P}^-(\mathbf{A})$ , de manière analogue à celle utilisée pour le contact élémentaire.

• Toutefois, les valeurs propres de  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$  ne sont généralement pas la somme directe des valeurs propres des  $\underline{\mathbf{p}}(c)$ , du fait de la dispersion statistique des orientations des contacts élémentaires dans l'amas granulaire:

- cette dispersion des orientations, fait que deux contacts voisins peuvent interagir au cours du mouvement, la puissance *rendue* de l'un réalimentant la puissance *reçue* de l'autre,  
- cet effet de population, appelé “réalimentation interne”, influe sur les termes du bilan énergétique de l'amas granulaire, il est pris en compte globalement dans l'Approche Énergétique par une grandeur scalaire  $R(\mathbf{A})$ , le *taux de réalimentation interne*, telle que

$$\begin{cases} \mathbf{P}^+(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{A}} \mathbf{p}^+(c) + R(\mathbf{A}) \sum_{\mathbf{A}} \mathbf{p}^-(c) \\ \mathbf{P}^-(\mathbf{A}) = [1 - R(\mathbf{A})] \sum_{\mathbf{A}} \mathbf{p}^-(c) \end{cases}$$

- ce taux de réalimentation interne vérifie toujours  $0 \leq R(\mathbf{A}) \leq 1$ , et s'exprime comme une fonctionnelle sur la population des tenseurs des actions de contact élémentaires:

$$R(\mathbf{A}) = \frac{1}{(1 - \sin\psi)} \cdot \left[ 1 - \frac{N_{\parallel} \left\{ \sum_{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{p}}(c) \right\}}{\sum_{\mathbf{A}} N_{\parallel} \left\{ \underline{\mathbf{p}}(c) \right\}} \right]$$

• Les valeurs propres de  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$  se trouvent liées par une relation, l'équation de la dissipation d'énergie par friction dans l'amas granulaire, qui intègre la dissipation par friction aux contacts élémentaires, avec l'effet de “réalimentation interne” dans la population des contacts:

$$Tr\{\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})\} = \frac{\sin\psi}{1 - R(\mathbf{A})} \frac{N_{\parallel} \{\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})\}}{(1 - \sin\psi)}$$

ou sa forme équivalente 
$$\frac{\mathbf{P}^+(\mathbf{A})}{\mathbf{P}^-(\mathbf{A})} = \frac{[1 + \sin\psi - R(\mathbf{A})(1 - \sin\psi)]}{(1 - \sin\psi) \cdot (1 - R(\mathbf{A}))}$$

- Cette fonction  $R(A)$  se trouve aussi jouer le rôle d'une sorte de fonction d'état, attachée au degré de désordre statistique dans les orientations de la population des contacts élémentaires contenus dans l'amas granulaire. Son minimum  $R(A) = 0$  définit des structures ordonnées dans la distribution des orientations de contacts élémentaires, qui rendent minimal le taux de dissipation dans l'amas granulaire, ces structures, appelées Modes de dissipation minimale, sont:
  - Le Mode I, tridimensionnel, de signature (+,-,-), pour lequel les tenseurs élémentaires  $\underline{\mathbf{p}}(c)$  ont une même direction propre portant leur valeur propre **positive**; dans l'amas en mouvement, les directions des vitesses de glissement intergranulaires sont toutes orientées à  $\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$  par rapport à cette direction propre commune;
  - Le Mode II, tridimensionnel, de signature (+,+,-), pour lequel les tenseurs élémentaires  $\underline{\mathbf{p}}(c)$  ont une même direction propre portant leur valeur propre **negative**; dans l'amas en mouvement, les directions des vitesses de glissement intergranulaires sont toutes orientées à  $\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}$  par rapport à cette direction propre commune;
  - Le Mode frontière en déformation plane, de signature (+,0,-) qui vérifie simultanément les propriétés des Modes I et II.

Pour les Modes de dissipation minimale, l'équation de dissipation d'énergie par friction dans l'amas granulaire devient identique à celle du contact élémentaire (car  $R=0$ ), les orientations préférentielles de la population des contacts élémentaires constitue une sorte de polarisation des actions intérieures dans l'amas granulaire en mouvement.

Enfin ces Modes de dissipation minimale présentent une propriété, *la similitude interne*, essentielle pour les développements du texte principal.

#### **Propriété de similitude interne des Modes de dissipation minimale**

- Dans un amas granulaire  $A$  en mouvement de dissipation minimale, quel que soit le sous-amas  $A_1$  inclus dans  $A$ , les puissances reçues  $\mathbf{P}^+(A_1)$  et  $\mathbf{P}^+(A)$  d'une part, et d'autre part les puissances rendues  $\mathbf{P}^-(A_1)$  et  $\mathbf{P}^-(A)$ , sont portées par les mêmes ensembles de directions vectorielles, ce qui signifie, pour chacun des Modes de dissipation minimale:
  - en Mode I, de signature (+,-,-), les puissances reçues  $\mathbf{P}^+(A_1)$  et  $\mathbf{P}^+(A)$  sont portées par la même direction, qui est une direction propre commune aux deux tenseurs  $\underline{\mathbf{P}}(A_1)$  et  $\underline{\mathbf{P}}(A)$  d'une part, et d'autre part les puissances rendues  $\mathbf{P}^-(A_1)$  et  $\mathbf{P}^-(A)$  sont portées par le même plan vectoriel, engendré par les deux autres directions propres des tenseurs  $\underline{\mathbf{P}}(A_1)$  et  $\underline{\mathbf{P}}(A)$ , toutefois, ces deux autres directions propres ne sont pas nécessairement communes aux deux tenseurs; les deux repères propres de  $\underline{\mathbf{P}}(A_1)$  et  $\underline{\mathbf{P}}(A)$  se déduisent l'un de l'autre par une rotation autour de la direction propre commune, portant l'unique valeur propre **positive**,
  - en Mode II, de signature (+,+,-), la configuration est symétrique de la précédente, les deux repères propres de  $\underline{\mathbf{P}}(A_1)$  et  $\underline{\mathbf{P}}(A)$  se déduisant l'un de l'autre par une rotation autour de la direction propre commune, portant l'unique valeur propre **negative**;
  - en Mode frontière en déformation plane, de signature (+,0,-), qui est la frontière commune entre les Modes I et II, alors  $\underline{\mathbf{P}}(A_1)$  et  $\underline{\mathbf{P}}(A)$  ont nécessairement leurs trois directions propres communes deux à deux, car  $\mathbf{P}^+(A_1)$  et  $\mathbf{P}^+(A)$  sont portés par une même direction propre, de même pour  $\mathbf{P}^-(A_1)$  et  $\mathbf{P}^-(A)$ , et la troisième direction propre est donc nécessairement commune, et porte une valeur propre nulle (en dissipation minimale, la déformation plane est à la fois globale et locale).

- Le tenseur des actions intérieures de l'amas granulaire  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$  étant formé par la somme des tenseurs des actions de contact élémentaires  $\underline{\mathbf{p}}_{(c)}$ , étendue à tous les contacts de l'amas, la partition de  $\mathbf{A}$  en sous-amas peut être poursuivie jusqu'à individualiser chaque contact élémentaire. Les propriétés résumées plus haut demeurent valides. Il faut cependant souligner que dans cette partition ultime de l'amas discontinu, les tenseurs des actions de contact élémentaires sont tous plans, et de signature  $(+,0,-)$ .
- Enfin la similitude interne attachée aux Modes de la dissipation minimale inclut une propriété qui joue un rôle-clé dans les développements considérés ici: la condition de *signature de Mode*, qui fait que quel que soit le sous-amas  $\mathbf{A}_1$  inclus dans  $\mathbf{A}$ , les signatures de  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A}_1)$  et  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$  sont identiques.

### 1-1-3 Milieu continu équivalent

- Le passage au milieu continu équivalent, amène naturellement à considérer le "tenseur des actions intérieures du milieu continu équivalent", symétrique et du 2<sup>nd</sup> ordre, défini à partir des tenseurs eulériens des contraintes (*les efforts intérieurs*) et taux de déformations (*les mouvements intérieurs*) par:  $\underline{\boldsymbol{\pi}} = \frac{1}{2} [\underline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \otimes \underline{\boldsymbol{\sigma}}]$  en produit contracté

$$\text{de composantes } \pi_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \dot{\varepsilon}_{kj} + \dot{\varepsilon}_{il} \sigma_{lj})$$

Ce tenseur présente à son tour des propriétés remarquables, et en particulier:

- sa trace est la puissance développée par les efforts intérieurs, car  $Tr\{\underline{\boldsymbol{\pi}}\} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ ;
- ses valeurs propres peuvent s'interpréter comme des flux d'énergie mécanique échangés avec le milieu extérieur, et l'on peut encore définir pour le milieu continu équivalent une puissance *reçue*, et une puissance *rendue*,  $\boldsymbol{\pi}^+$  et  $\boldsymbol{\pi}^-$ , par une méthode analogue à celle employée pour le contact élémentaire;
- lorsque les tenseurs des contraintes et des taux de déformations ont mêmes directions propres (coaxialité), alors il en est de même avec le tenseur  $\underline{\boldsymbol{\pi}}$ .
- L'Approche Energétique établit par identification énergétique, la correspondance suivante entre la valeur moyenne de  $\underline{\boldsymbol{\pi}}$  sur un domaine continu équivalent  $\mathbf{D}$ , et le tenseur  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$  de l'amas granulaire contenu

$$\text{dans le domaine } \mathbf{D} : \quad \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}} = \frac{1}{V(\mathbf{D})} \int_{\mathbf{D}} \underline{\boldsymbol{\pi}} dv = \frac{1}{V(\mathbf{D})} \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$$

Il s'ensuit que  $\overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}}$  vérifie les mêmes propriétés que le  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$  qu'il représente, et en particulier vérifie l'équation de dissipation d'énergie par friction.

- Dans le cas des Modes de dissipation minimale, et lorsque les tenseurs sont coaxiaux, le tenseur  $\underline{\boldsymbol{\pi}}$  (local), vérifie une forme particulièrement simple de l'équation de dissipation, qui relie les contraintes principales et les taux de déformations principales:

$$\boxed{\sum_i \sigma_i \dot{\varepsilon}_i = \sin \psi \cdot \sum_i |\sigma_i \dot{\varepsilon}_i|}$$

## Annexe 1-2 Règle de la moindre dissipation

### 1-2-1 Production minimale d'entropie dans les processus irréversibles

- La Thermodynamique établit, à partir du second principe, que: *lorsqu'un système siège d'un processus irréversible évolue au voisinage des conditions d'équilibre* (précisément dans le domaine linéaire où les relations d'Onsager sont valides), *alors le système évolue vers un état stationnaire caractérisé par la production d'entropie minimale compatible avec les conditions imposées au système, telles les conditions aux limites ou les liaisons internes...l'évolution vers cet état stationnaire signifie l'oubli des conditions initiales particulières* (d'après I.Prigogine et al. [33] et [34]).  
La base de la démonstration s'appuie sur le fait qu'un équilibre est un maximum de l'entropie.

**1-2-2 Lien avec la dissipation d'énergie mécanique**

- En thermodynamique des milieux continus (voir par exemple P.Germain [20]), on montre que le taux de production irréversible d'entropie spécifique, noté  $\overset{\circ}{\sigma}$ , s'écrit, en fonction de l'énergie interne spécifique  $e$ , de l'entropie spécifique  $s$ , du volume spécifique  $v_s$ , du vecteur courant de chaleur  $\vec{q}$ , et du taux volumique de chaleur fournie par l'extérieur  $r$ , comme somme de deux termes  $\overset{\circ}{\sigma} = \frac{1}{T} \cdot \{\Phi_1 + \Phi_2\}$ , avec:

- $\Phi_1 = v_s Tr\{\underline{\pi}\} - \left( \frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt} \right)$  qui est la *dissipation intrinsèque spécifique*;

- $\Phi_2 = v_s \left( r - \frac{\vec{q}}{T} GradT \right)$  qui est la *dissipation thermique spécifique*

Lorsque les effets thermiques sont négligeables devant les autres, alors  $\overset{\circ}{\sigma} \approx \frac{\Phi_1}{T}$ ; à  $T$  donné, le minimum de  $\overset{\circ}{\sigma}$  est donc celui de  $\Phi_1$ .

- Cette dissipation intrinsèque spécifique  $\Phi_1$  apparaît comme une différence entre deux termes:
  - a) le terme  $v_s Tr\{\underline{\pi}\}$  qui est la puissance des efforts intérieurs par unité de masse;
  - b) le terme  $\left( \frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt} \right)$  qui est la puissance mécanique réversible reçue par unité de masse.
- Pour illustrer par un exemple, considérons le cas d'un milieu élastoplastique parfait (Prandtl-Reuss) où l'on décompose la vitesse de déformation  $\underline{\dot{\epsilon}}$  en deux composantes, élastique (*c'est à dire réversible*) et plastique:  $\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^p$ .

La dissipation intrinsèque spécifique devient

$$\Phi_1 = v_s Tr\{\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})\} - v_s Tr\{\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}^e)\} = v_s Tr\{\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}^p)\}$$

et se réduit à la puissance mécanique dissipée dans les déformations plastiques, par unité de masse.

- Dans le cas de notre milieu granulaire formé de granulats idéalement indéformables, la puissance mécanique réversible reçue par unité de masse est nulle, et la dissipation intrinsèque spécifique est donc:  $\Phi_1 = v_s Tr\{\underline{\pi}\}$ .

Enfin, lorsque les effets thermiques demeurent négligeables devant les effets mécaniques, ce que nous supposons ici, les effets des variations de température sont également négligeables, que ce soit en variation vis à vis de l'espace (gradients) ou dans le temps; ce qui revient à raisonner à  $T$  constant dans l'espace et le temps.

Pourvu que les effets thermiques demeurent négligeables devant les effets mécaniques, le minimum du taux de production irréversible d'entropie correspond donc bien au minimum de la dissipation spécifique d'énergie mécanique.

- La **Règle de la moindre dissipation** s'énonce donc, dans notre cas:

**Lorsqu'un milieu granulaire évolue au voisinage des conditions d'équilibre (précisément dans le domaine linéaire où les relations d'Onsager sont valides), alors le milieu évolue vers un état stationnaire caractérisé par la dissipation spécifique minimale compatible avec les conditions imposées au système, telles les conditions aux limites ou les liaisons internes, l'évolution vers cet état stationnaire signifie l'oubli des conditions initiales particulières.**

- Lorsque l'on suit un domaine matériel  $D$  au cours du mouvement, les résultats précédents s'étendent par intégration au domaine tout entier: la règle de la moindre dissipation s'applique alors à la dissipation d'énergie mécanique dans le domaine tout entier.

Les relations établies par l'Approche Energétique entre le continu équivalent et l'amas granulaire discontinu conduisent alors au résultat suivant:

$$\int_D v_s \cdot Tr\{\underline{\pi}\} dm = \int_D Tr\{\underline{\pi}\} dv = V(D) \cdot Tr\{\overline{\underline{\pi}}\} = Tr\{\underline{P}(A)\} \text{ est minimal}$$

### 1-2-3 Lien avec les Modes de dissipation minimale

- Lorsque les conditions aux limites permettent au milieu de rendre de l'énergie au milieu extérieur (pas de frottement excessif des déformations, ou de restrictions latérales trop rigides), il doit donc tendre vers le Mode de dissipation minimale le plus proche des conditions imposées, et la distribution des actions intérieures élémentaires doit donc se polariser. Cette polarisation se manifeste expérimentalement par l'apparition de lignes de glissement dont les orientations sont effectivement polarisées, ce sont les *lignes de glissement des équilibres limite de Rankine*, connues depuis très longtemps, et que l'Approche Energétique attribue donc à l'établissement progressif de Modes de dissipation minimale.
- Toutefois, on ne sait pas encore si les milieux granulaires usuels arrivent à atteindre un mouvement avec véritablement  $\underline{R} \approx \underline{0}$  (polarisation complète des actions intérieures élémentaires), ou s'il subsiste un minimum de désordre, nécessaire pour assurer la compatibilité des mouvements dans le milieu (polarisation imparfaite).
- Dans le présent article, on suppose que pour des conditions aux limites permettant au milieu de rendre de l'énergie librement au milieu extérieur (c'est bien le cas des situations expérimentales usuelles « triaxial », « biaxial », essais sur presses tridimensionnelles., hors chemins de sollicitation « oedométriques » ou de « consolidation »), alors son mouvement se rapprochera suffisamment des conditions de la dissipation minimale, pour que l'on puisse considérer que les propriétés attachées à ces Modes de dissipation minimale, sont effectivement réalisées dans le mouvement du milieu.

## ANNEXES AU CHAPITRE 2

### Annexe 2-1 Propriété particulière des situations expérimentales usuelles (sans rotations d'axes)

- En convenant de noter pour abréger  $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ , le tenseur local des actions intérieures, formé par le produit symétrique contracté des tenseurs locaux  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\dot{\epsilon}}$ , nous démontrons ici que, pour une large gamme de situations expérimentales, à condition que la réponse du milieu soit coaxiale à la sollicitation,

$$\text{on a par construction: } \begin{cases} Tr\{\overline{\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}\} = Tr\{\underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}})\} \\ \text{et} \\ N_{\parallel}\{\overline{\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}\} = N_{\parallel}\{\underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}})\} \end{cases}$$

#### 2-1-1 Configuration des situations expérimentales usuelles

- Considérons un corps d'épreuve parallélépipédique confiné dans une membrane extensible, qui sera notre domaine  $D$ . Rapportons-le au référentiel du schéma, *attaché à la géométrie du corps d'épreuve en mouvement*, et centré sur son centre de gravité. Le corps d'épreuve est soumis sur ses faces extérieures à deux types de conditions aux limites, qui s'exercent sur des paires de faces opposées:
  - a) conditions imposées en composante normale de la vitesse de déplacement, cette composante est alors uniforme sur la paire de faces considérées (*système de plaques rigides*);
  - b) conditions imposées en contrainte normale, qui est alors uniforme et purement normale pour la paire de faces considérée (*systèmes par pression de contact*);
  - c) les dispositifs de contact entre le corps d'épreuve et l'appareillage externe sont tels que les distributions de forces de contact, lesquelles ne sont pas toujours uniformes (*faces avec conditions en déplacement*), sont toujours normales (*utilisation de platines et de membranes lubrifiées*), les efforts résultants sur les faces demeurent centrés.

Nous nous intéressons aux milieux dont la réponse conserve les symétries de la sollicitation imposée, pour lesquels le corps d'épreuve se déforme en demeurant sensiblement parallélépipédique au cours du mouvement.

Ces conditions correspondent aux expériences classiques sans rotations d'axes, c'est à dire:

- les conditions axissymétriques en contraintes de "l'appareil triaxial" (1 condition en composante normale de la vitesse de déplacement, 2 conditions identiques en contraintes normales);
- les conditions de déformation plane de "l'appareil biaxial" (2 conditions en composante normale de vitesse de déplacement, 1 condition en contraintes normales);
- presses tridimensionnelles, du type I.M.G. Grenoble ou Université de Berkeley.

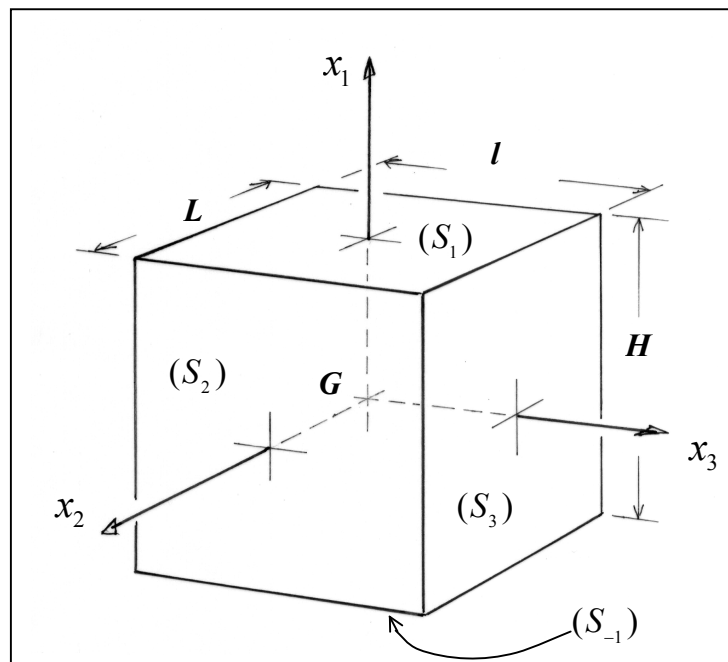
Tout comme dans les interprétations usuelles de ces types d'expériences, nous négligerons ici l'effet de la pesanteur.

- Envisageons alors, pour fixer les idées, une sollicitation de type Mode I, avec conditions imposées en vitesse de déplacement normal sur la direction  $x_1$ , en contraintes normales sur la direction  $x_2$ , et à nouveau en déplacement normal sur  $x_3$ ; représentons les forces extérieures exercées sur les faces du

corps d'épreuve, par une densité de forces  $\vec{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$ , et par  $\vec{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$  les vitesses de déplacement locales

des points matériels de ces faces extérieures sur lesquels s'exercent ces forces.

### Schéma du référentiel



### 2-1-2 Tenseur des actions extérieures

Considérons le tenseur  $\underline{\mathbf{T}}_{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \int_{\delta D} [\vec{\mathbf{f}} \otimes \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{f}}] ds$ , formé par le produit symétrique des forces et

vitesses des points d'application de ces forces sur la surface extérieure de D.

Nous désignerons ce tenseur par "tenseur des actions extérieures", observons que sa Trace donne la

puissance des efforts extérieurs :  $Tr\{\underline{\mathbf{T}}_{\mathbf{E}}\} = \int_{\delta D} \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} ds$ .

Analysons les contributions apportées par les faces de notre corps d'épreuve à ce tenseur des actions extérieures.

- Sur les faces  $S_1$  et  $S_{-1}$ , la densité de forces, étant normale, est  $\vec{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ; la contribution à  $\underline{\mathbf{T}}_{\mathbf{E}}$

apportée par les faces  $S_1$  et  $S_{-1}$  est donc :

$$\begin{bmatrix} \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 \cdot v_1 ds & \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 \cdot v_2 ds & \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 \cdot v_3 ds \\ \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 \cdot v_2 ds & 0 & 0 \\ \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 \cdot v_3 ds & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le terme diagonal peut être transformé, en tenant compte de:

- la condition en déplacement ( $v_1$  uniforme);
- les égalités, par définition,  $v_1(s_1) = -v_1(s_{-1}) = \frac{1}{2} \frac{dH}{dt}$  et  $\frac{dH}{dt} = -H \cdot \bar{\epsilon}_1$ ;
- l'égalité (conditions d'équilibre et définition des contraintes moyennes)  $\int_{S_1} f_1 ds - \int_{S_{-1}} f_1 ds = -2S_1 \bar{\sigma}_1$ ;

on en tire pour ce terme diagonal :  $\int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 \cdot v_1 ds = V(D) \cdot \bar{\sigma}_1 \bar{\epsilon}_1$

- La contribution apportée par les faces  $S_2$  et  $S_{-2}$  s'établit de manière analogue. En tenant compte des

conditions en contraintes (ici  $\bar{f} = \begin{cases} 0 \\ f_2 \\ 0 \end{cases}$  avec  $f_2$  uniforme sur  $S_2$  et  $S_{-2}$ ), des définitions des valeurs

moyennes, conditions d'équilibre et conventions de signe, le terme diagonal s'écrit  $\int_{S_2 \cup S_{-2}} f_2 \cdot v_2 ds = V(D) \cdot \bar{\sigma}_2 \bar{\epsilon}_2$

- La contribution des faces  $S_3$  et  $S_{-3}$  s'obtient en transposant celle des faces  $S_1$  et  $S_{-1}$ .
- Nous obtenons alors dans notre référentiel:

$$\underline{\mathbf{T}}_E = \begin{bmatrix} V(D) \bar{\sigma}_1 \bar{\epsilon}_1 & \left( \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 v_2 ds + \int_{S_2 \cup S_{-2}} f_2 v_1 ds \right) & \left( \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 v_3 ds + \int_{S_3 \cup S_{-3}} f_3 v_1 ds \right) \\ \left( \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 v_2 ds + \int_{S_2 \cup S_{-2}} f_2 v_1 ds \right) & V(D) \bar{\sigma}_2 \bar{\epsilon}_2 & \left( \int_{S_2 \cup S_{-2}} f_2 v_3 ds + \int_{S_3 \cup S_{-3}} f_3 v_2 ds \right) \\ \left( \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 v_3 ds + \int_{S_3 \cup S_{-3}} f_3 v_1 ds \right) & \left( \int_{S_2 \cup S_{-2}} f_2 v_3 ds + \int_{S_3 \cup S_{-3}} f_3 v_2 ds \right) & V(D) \bar{\sigma}_3 \bar{\epsilon}_3 \end{bmatrix}$$

- Examinons les termes non diagonaux, tels que  $T_{E_{12}} = \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 v_2 ds + \int_{S_2 \cup S_{-2}} f_2 v_1 ds$ .
- si le corps d'épreuve demeure parallélépipédique au cours du mouvement, alors sur  $S_1$  et  $S_{-1}$   $v_2(M) = x_2 \cdot \bar{\epsilon}_2 + \tilde{v}_2(M)$ , avec  $\int_{S_1} \tilde{v}_2(M) ds = \int_{S_{-1}} \tilde{v}_2(M) ds = 0$ ;
- si les résultantes s'exerçant sur les faces extérieures demeurent centrées, alors sur  $S_1$  et  $S_{-1}$   $f_1(M) = \bar{\sigma}_1 + \tilde{f}_1(M)$  avec  $\int_{S_1} \tilde{f}_1(M) ds = \int_{S_{-1}} \tilde{f}_1(M) ds = 0$  d'une part (définition des contraintes moyennes et conditions d'équilibre), et d'autre part  $\int_{S_1} f_1 x_2 ds = \int_{S_{-1}} f_1 x_2 ds = 0$  du fait de la condition de centrage;
- le terme non diagonal n'est donc fonction que des seules irrégularités locales en vitesses et en distributions de forces de contact :

$$T_{E_{12}} = \frac{1}{V(D)} \left\{ \int_{S_1 \cup S_{-1}} f_1 v_2 ds + \int_{S_2 \cup S_{-2}} f_2 v_1 ds \right\} = \frac{1}{V(D)} \left\{ \int_{S_1 \cup S_{-1}} \tilde{f}_1 \tilde{v}_2 ds + \int_{S_2 \cup S_{-2}} \tilde{f}_2 \tilde{v}_1 ds \right\}$$

- pourvu que les conditions aux limites et la réponse du corps d'épreuve soient suffisamment régulières, ces termes sont normalement nuls, ou du 2<sup>ème</sup> ordre par rapport aux produits des valeurs moyennes;
- pour le milieu granulaire en déformation, nous admettons que ces irrégularités sont suffisamment décorréélées pour qu'il en soit bien ainsi, en particulier lorsque la dimension du corps d'épreuve devient suffisamment grande par rapport à la dimension moyenne des granulats.

- Au premier ordre, on a donc  $\underline{\mathbf{T}}_E = \frac{1}{2} \int_{\delta D} [\underline{\mathbf{f}} \otimes \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{f}}] ds = V(D) \cdot \begin{bmatrix} \overline{\sigma_1 \dot{\epsilon}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\sigma_2 \dot{\epsilon}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\sigma_3 \dot{\epsilon}_3} \end{bmatrix}$

### 2-1-3 Identification énergétique avec le tenseur des actions intérieures

Les valeurs propres de  $\underline{\mathbf{T}}_E$ , tout comme celles de  $\overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})}$ , peuvent s'interpréter comme des flux d'énergie mécanique, que le milieu extérieur échange avec notre domaine D.

Dans nos conditions quasi-statiques, et pour des raisons de cohérence physique, ces flux doivent être égaux 2 à 2.

C'est à dire que dans nos conditions de Mode I ( $\dot{\epsilon}_1 > 0$ , unique en son signe), le flux d'énergie mécanique fourni par les actions extérieures au domaine D sur la direction propre N° 1, et qui vaut

$\underline{\mathbf{T}}_{E_1} = V(D) \cdot \overline{\sigma_1 \dot{\epsilon}_1}$ , doit être égal au flux d'énergie mécanique reçu par le domaine D sur la direction propre N°1, et qui vaut  $V(D) \cdot \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})_1}$ .

En complétant le raisonnement sur les autres directions propres, et en formant les sommes correspondantes, on obtiendra bien

$$V(D) \cdot \left\{ \overline{\sigma_1 \dot{\epsilon}_1} + \overline{\sigma_2 \dot{\epsilon}_2} + \overline{\sigma_3 \dot{\epsilon}_3} \right\} = V(D) \cdot \left\{ \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})_1} + \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})_2} + \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})_3} \right\} \text{ c'est à dire}$$

$$Tr \left\{ \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})} \right\} = Tr \left\{ \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})} \right\}$$

De même pour la norme  $N_{\parallel}$  :  $N_{\parallel} \left\{ \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})} \right\} = N_{\parallel} \left\{ \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})} \right\}$

### Annexe 2-2 : Compatibilité de l'équation de dissipation avec le type d'hétérogénéités de la section 2.1.3

Montrons ici que la vérification locale de l'équation de dissipation, entraîne bien sa vérification par les valeurs moyennes des contraintes et vitesses de déformation sur le domaine, malgré la présence d'hétérogénéités du type défini en section 2.1.3.

- Du fait des conditions de signe et d'indépendance mutuelle posées en (1.10), observons d'abord que, pour tout i

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sigma_i^{(M)} \dot{\epsilon}_i^{(M)} \right| = \left| \overline{\sigma_i^{(D)} \dot{\epsilon}_i^{(D)}} \right| \left[ 1 + \eta_i^{(M)} + \eta_0^{(M)} \right] \left[ 1 + \zeta_i^{(M)} + \zeta_0^{(M)} \right] \\ \int_D \left[ 1 + \eta_i^{(M)} + \eta_0^{(M)} \right] \left[ 1 + \zeta_i^{(M)} + \zeta_0^{(M)} \right] dv = V(D) \left[ 1 + \frac{1}{V(D)} \int_D \eta_0^{(M)} \zeta_0^{(M)} dv \right] \end{array} \right.$$

- L'intégration sur tout le domaine de l'équation locale, en tenant compte de la première observation, conduit d'abord à:



$$\sum_i \left\{ \overline{\sigma}_i^{(D)} \overline{\dot{\epsilon}}_i^{(D)} \int_D [1 + \eta_i^{(M)} + \eta_0^{(M)}] [1 + \zeta_i^{(M)} + \zeta_0^{(M)}] dv \right\} = \sin \psi \cdot \sum_i \left\{ \left| \overline{\sigma}_i^{(D)} \overline{\dot{\epsilon}}_i^{(D)} \right| \int_D [1 + \eta_i^{(M)} + \eta_0^{(M)}] [1 + \zeta_i^{(M)} + \zeta_0^{(M)}] dv \right\}$$

tenant compte de la deuxième observation faite plus haut, les intégrales peuvent être condensées, et l'on obtient, en divisant les deux membres par  $V_{(D)}$  :

$$\left\{ 1 + \frac{1}{V_{(D)}} \int_D \eta_0^{(M)} \zeta_0^{(M)} dv \right\} \cdot \left\{ \sum_i \overline{\sigma}_i^{(D)} \overline{\dot{\epsilon}}_i^{(D)} \right\} = \sin \psi \cdot \left\{ \sum_i \left| \overline{\sigma}_i^{(D)} \overline{\dot{\epsilon}}_i^{(D)} \right| \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{V_{(D)}} \int_D \eta_0^{(M)} \zeta_0^{(M)} dv \right\}$$

- Le facteur contenant l'intégrale, qui figure aux deux membres, n'est en général pas nul, et peut donc être simplifié des deux cotés de cette égalité, nous retrouvons alors l'équation de la dissipation minimale, mais écrite avec les contraintes moyennes et vitesses de déformation moyennes.

### Annexe 2-3 Conditions finales de compatibilité (section 2.2)

Détaillons pour chaque Mode.

- En Mode I, de signature (+,-,-), les deux repères propres de  $\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}})$  et  $\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  ont en commun la direction propre portant l'unique valeur propre **positive**, qui est la même pour les deux tenseurs; la différence entre les deux tenseurs, qui vaut  $\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}})$  a donc tous ses termes nuls suivant la ligne ou la colonne liées à cette direction propre particulière; les termes restants sur les deux autres directions propres sont ceux d'un tenseur symétrique, qui vérifie de plus  $Tr\left\{\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}})\right\} = 0$ .

Ordonnant les directions propres suivant l'ordre décroissant des valeurs propres, on obtient donc

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \text{ avec les conditions complémentaires de trace nulle, de symétrie, et de}$$

conservation de la signature de Mode.

- En Mode II, de signature (+,+,-), un raisonnement symétrique, qui particularise cette fois la direction propre portant l'unique valeur propre **negative**, aboutit à la forme

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec les conditions complémentaires}$$

- En Mode frontière en déformation plane, de signature (+,0,-), qui constitue la frontière commune entre les Modes I et II, le tenseur  $\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}})$  doit être en même temps de la forme trouvée pour le Mode I et de la forme trouvée pour le

Mode II ; cette condition, jointe à celle de trace nulle, conduit à la forme :  $\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

### ANNEXES AU CHAPITRE 3

#### Annexe 3-1 -Orientation des surfaces de localisation-Mouvements à volume stationnaire-(section 3.1.1)

Nous recherchons, pour chaque Mode de dissipation minimale, les surfaces qui satisfont aux deux conditions:

- a) présenter une orientation matérielle, comme enveloppe de glissements élémentaires, correspondant au Mode considéré;
  - b) présenter un flux d'énergie mécanique, au sens des actions intérieures, purement tangentiel.
- Plaçons-nous en Mode I, dans le repère propre du tenseur des actions intérieures de l'amas granulaire  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$ , qui est ici de signature (+,-,-), et ordonnons les directions propres dans l'ordre décroissant des valeurs propres :
  - les **normales** aux plans tangents aux glissements élémentaires sont distribuées suivant un cône de révolution autour de la direction portant  $\mathbf{P}^+$ , et faisant un angle de  $\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}$  avec cet axe (voir [17], section 2.6.1), dans le repère propre, elles sont donc de la forme

$$\vec{n}_{gl} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \\ \cos\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \\ \sin\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \end{cases}$$

- dans son repère propre, le tenseur  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$ , solution de l'équation de dissipation minimale, en Mode I, est de la forme (avec  $S = \sin\psi$ ):

$$\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A}) = \frac{Tr\{\underline{\mathbf{P}}\}}{2S} \cdot \begin{bmatrix} (1+S) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(1-S) & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)(1-S) \end{bmatrix} \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

- Pour qu'une surface présente localement un flux d'énergie mécanique, au sens des actions intérieures, purement tangentiel, il faut que sa normale vérifie localement  $\vec{n}\underline{\mathbf{P}}\vec{n} = 0$ .

- les normales  $\vec{n}_{gl}$  vérifiant cette condition, sont donc telles que

$$\alpha \cos^2 \theta + (1-\alpha) \sin^2 \theta = 1 \text{ soit encore } \cos 2\theta = \frac{1}{2\alpha - 1}, \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

- La seule solution possible est donc  $\alpha = 0$ , qui correspond à la déformation plane ( $\mathbf{P}_2 = 0$ )

- En Mode II, de signature (+,+,-), un raisonnement symétrique, particularisant la direction portant  $\mathbf{P}^-$ , conduit au même résultat.

### Annexe 3-2 Chaînes de contraintes actifs dans une bande de localisation- Détermination de l'orientation par analyse des conditions d'équilibre (section 3.1.2)

Montrons directement que l'orientation des chaînes de contraintes actifs est symétrique de l'orientation de la surface de localisation, par rapport à l'axe portant  $\pi^+$ .

- considérons un sous-domaine  $\mathbf{D}_1$  de la surface de localisation, celle-ci est cinématiquement équivalente à une discontinuité tangentielle de la vitesse, que nous noterons  $[\vec{v}]$ , soit  $\vec{F}$  la force équivalente au système de forces actives qui s'applique sur  $\mathbf{D}_1$ , telle que le tenseur des actions intérieures sur le sous domaine soit donné par  $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{D}_1) = \frac{1}{2} \{ \vec{F} \otimes [\vec{v}] + [\vec{v}] \otimes \vec{F} \}$

- notant  $\theta$  l'angle entre les directions de  $[\vec{v}]$  et  $\vec{F}$ , ce tenseur, dans le repère propre des actions intérieures sur l'ensemble du domaine (ce repère propre général existe toujours sur un domaine en déformation plane) est donné par

$$\underline{\mathbf{P}}_{(D_1)} = \|\vec{F}\| \cdot \|[v]\| \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- du fait de la propriété de similitude interne, en déformation plane, ce tenseur doit être homothétique au tenseur des actions intérieures de l'ensemble du domaine, donné, dans le même repère, par

$$\underline{\mathbf{P}}_{(D)} = N_{\parallel} \{ \underline{\mathbf{P}}_{(D)} \} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) \end{pmatrix}$$

- en tenant compte de ce que le produit scalaire de  $\vec{F}$  et  $[v]$  doit être positif (il y a dissipation), et de la condition de non-traction (la composante normale de  $\vec{F}$  doit être en compression), l'analyse de tous les cas possibles montre qu'à  $[v]$  donné, il y a **une seule solution pour la direction de  $\vec{F}$ , qui est la direction indiquée dans le texte principal.**

### Annexe 3-3 : Relation entre l'orientation "de Coulomb" et les grandeurs physiques $\psi$ et $\delta$ (section 3.2.3).

- Par définition, lors d'un essai d'écrasement en déformation plane, "l'angle de frottement interne"  $\phi$ , est défini par l'équation  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{(1 + \sin \phi)}{(1 - \sin \phi)}$  au maximum de la résistance.
- Par ailleurs, l'équation de dissipation minimale (voir [17]) implique qu'en déformation plane, le milieu granulaire vérifie la relation  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{-\dot{\epsilon}_3 (1 + \sin \psi)}{\dot{\epsilon}_1 (1 - \sin \psi)}$
- Le rapport des taux de déformations peut être exprimé en fonction de "l'angle de dilataance"  $\delta$  :  $\frac{-\dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1} = \frac{(1 + \sin \delta)}{(1 - \sin \delta)}$ .

- La relation entre  $\phi, \psi$  et  $\delta$  est donc  $\boxed{\frac{(1 + \sin \phi)}{(1 - \sin \phi)} = \frac{(1 + \sin \delta) (1 + \sin \psi)}{(1 - \sin \delta) (1 - \sin \psi)}}$

Cette relation n'est valide qu'en déformation plane, pour laquelle a été défini l'angle de dilataance  $\delta$ .

## ANNEXE AU CHAPITRE 4

**Annexe 4-1 : Micromécanisme interne aux bandes de localisation- Termes du bilan énergétique- (Section 4.2.2)**

- Comme indiqué en Section 4.2.2, nous divisons la bande en couches parallèles à la zone axiale, chaque couche ( $n$ ) étant elle-même divisée en cellules de masses égales  $m_n$ .

Pour la cellule de la couche ( $n$ ), le tenseur des actions intérieures  $\underline{\mathbf{P}}(n)$  de l'amas granulaire contenu dans la cellule, est solution de l'équation de dissipation avec réalimentation interne (équation (1.4), section 1.1.2), et il est en déformation plane. Sa trace, qui donne la puissance mécanique dissipée dans la cellule, peut être rapportée à la dissipation spécifique  $\dot{\omega}(n)$  par :

$Tr\{\underline{\mathbf{P}}(n)\} = m_n \cdot \dot{\omega}(n)$ . Le tenseur  $\underline{\mathbf{P}}(n)$  peut alors s'explicitier dans son repère propre sous la forme:

$$\underline{\mathbf{P}}(n) = m_n \dot{\omega}(n) \begin{bmatrix} \frac{1+S^*}{2S^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1-S^*)}{2S^*} \end{bmatrix} \text{ avec } S^* = \frac{S}{1-R(1-S)}.$$

- Le tenseur des actions intérieures de l'amas,  $\underline{\mathbf{P}}(n)$ , est lui-même somme des tenseurs d'actions des contacts élémentaires contenus dans la cellule  $\underline{\mathbf{P}}(n) = \sum \underline{\mathbf{p}}$ , et par définition du taux de réalimentation interne (voir [17], section 2.3.2), on a, en fonction des puissances reçues et

$$\text{rendues:} \begin{cases} \mathbf{P}^+ = \sum p^+ + R \sum p^- \\ \mathbf{P}^- = (1-R) \sum p^- \end{cases} \text{ on peut alors exprimer ces puissances en fonction de la dissipation}$$

$$\frac{\sum p^+}{\sum p^-} = \frac{1+S}{1-S}$$

spécifique  $\dot{\omega}(n)$ , en notant  $K_- = \frac{1-S}{1+S}$ , on trouve ainsi pour l'ensemble des puissances reçues aux contacts élémentaires contenus dans la cellule de la couche ( $n$ ):

$$\sum p^+ = \frac{(1+S^*)}{2S^*} \frac{1}{(1-RK_-)} m_n \cdot \dot{\omega}(n)$$

- Suivant la dimension  $D_c$  adoptée pour le découpage du domaine en cellules (Figure 4-5), il conviendrait en toute rigueur de tenir compte de ce que les flux de réalimentation interne se répartissent en échanges internes à la cellule d'une part, et d'autre part en échanges externes à la cellule. Toutefois, si nous adoptons une dimension très petite pour cette dimension, et que la cellule ne contient plus que 1 contact, il est clair que la réalimentation ne pourra venir que de l'extérieur à la cellule. De l'autre côté, avec des cellules très grandes, c'est la part d'échanges avec l'extérieur qui deviendra négligeable dans la réalimentation (termes de frontières/ termes de volume). Dans ce qui suit, nous considérons que  $D_c$  est suffisamment petit pour que les termes d'échanges externes à la cellule soient prépondérants, et donc que les termes d'échanges internes à la cellule sont négligeables.

- Le flux de réalimentation émis par la cellule, vaut  $R \sum p^- = -\frac{R}{(1-R)} \frac{(1-S^*)}{2S^*} m_n \dot{\omega}(n)$ . Il se répartit en flux **intercouches**, qui va réalimenter les couches adjacentes ( $n-1$ ) et ( $n+1$ ), et flux **intracouche**, qui constitue un simple échange avec les cellules voisines dans la même couche ( $n$ ). Appelons  $\alpha$  le

coefficient d'anisotropie qui définit les proportions de cette répartition:  $\alpha = (\text{part intracouche}) / (\text{part intercouche})$ .

Le flux de réalimentation émis par notre cellule de la couche (n) se répartit donc en:

- part intracouche qui vaut  $\frac{\alpha R}{(1+\alpha)(1-R)} \frac{(1-S^*)}{2S^*} m_n \dot{\omega}^{(n)}$ ;
- part intercouche qui vaut  $\frac{R}{(1+\alpha)(1-R)} \frac{(1-S^*)}{2S^*} m_n \dot{\omega}^{(n)}$ , et qui est émise pour moitié vers la couche (n-1), pour moitié vers la couche (n+1).

• Ces éléments permettent alors d'écrire le bilan énergétique de la section (4.2.2).

• La racine  $<1$  de l'équation des solutions de la suite récurrente, vaut

$$\omega_1 = \left[ \frac{(1+\alpha)(1+S)}{R(1-S)} - \alpha \right] \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\left[ \frac{(1+\alpha)(1+S)}{R(1-S)} - \alpha \right]^2}} \right\} = [C] \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{[C^2]}} \right\}$$

pour  $R < 1/2$ ,  $S$  de l'ordre de 0,5, et  $\alpha > 0$ , le terme entre crochets  $[C]$  est en général largement supérieur à 1. Un développement limité en fonction de ce terme donne alors

$$\omega_1 \approx \frac{1}{2C} \left[ 1 + \frac{1}{4C^2} + \dots \right] \quad \text{d'où} \quad \text{Ln}(\omega_1) \approx -\text{Ln}(2C) = -\text{Ln} 2 \left[ \frac{(1+\alpha)(1+S)}{R(1-S)} - \alpha \right] \quad \text{qui}$$

conduit à l'équation (4.6) de la section 4.2.3.

## ANNEXES AU CHAPITRE 6

### Annexe 6-1 : Structure de la matrice des dérivées secondes $\left[ \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{W}}}{\partial Z_n \partial Z_p} \Big|_m \right]$

• La matrice des dérivées secondes étant toujours symétrique, elle est diagonalisable, et ses directions propres sont orthogonales. Dans le repère propre correspondant, qui est orthogonal (ce qui revient à effectuer un changement de repère dans l'espace des variables internes), la matrice peut alors être caractérisée par sa signature, liste des signes de ses valeurs propres.

• Lorsqu'il se produit une fluctuation sur les variables, à partir d'un état initial défini par  $\{Z_1(0), \dots, Z_n(0)\}$  dans l'espace des variables internes, le nouvel état pourra toujours être défini par  $\{Z_1(0) + \Delta Z u_1, \dots, Z_n(0) + \Delta Z u_n\}$  où  $\Delta Z$  est l'amplitude de la fluctuation, et le vecteur unitaire  $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$  représente la direction de la fluctuation (ou un axe de corrélation). Dans ce cadre, la

variation seconde  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}}$  engendrée par cette fluctuation s'obtiendra par:

$$\delta^2 \dot{\mathbf{W}} = \frac{1}{2} (\Delta Z)^2 \vec{u} \left[ \frac{\delta^2 \dot{\mathbf{W}}}{\delta Z_n \delta Z_p} \Big|_{\{Z(0)\}} \right] \vec{u}.$$

L'espace des variables interne étant rapporté au repère propre de la matrice, le signe de  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}}$  est donc celui d'une forme quadratique diagonalisée

$$\delta^2 \dot{\mathbf{W}}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \vec{u} \left[ \frac{\delta^2 \dot{\mathbf{W}}}{\delta Z_n \delta Z_p} \Big|_{\{Z(0)\}} \right] \vec{u} .$$

- Trois types de situations s'ensuivent:
  - soit les valeurs propres de la matrice sont toutes  $>0$ , alors quelle que soit la fluctuation,  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}}(\vec{u}) > 0$ , et donc  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}} > 0$ , c'est la situation a) de la section 6.1.3;
  - soit les valeurs propres de la matrice sont toutes  $<0$ , alors quelle que soit la fluctuation,  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}}(\vec{u}) < 0$ , et donc  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}} < 0$ , c'est la situation b) de la section 6.1.3;
  - soit les valeurs propres de la matrice sont pour partie  $>0$ , et pour partie  $<0$ , c'est la situation c) de la section 6.1.3.
- Montrons alors que lorsque la matrice  $\left[ \frac{\delta^2 \dot{\mathbf{W}}}{\delta Z_n \delta Z_p} \Big|_m \right]$  présente à la fois des termes diagonaux  $>0$  et des termes diagonaux  $<0$ , l'espace des variables internes de ce groupe se trouve partitionné en:
  - un domaine de fluctuations  $D^-$  sur lesquelles  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}} \leq 0$ , et qui auront donc tendance à se développer dans l'évolution du milieu vers la moindre dissipation;
  - un domaine de fluctuations  $D^+$  sur lesquelles  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}} \geq 0$ , et qui auront donc tendance à s'atténuer dans l'évolution du milieu vers la moindre dissipation.
- En effet, la forme quadratique diagonalisée  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}}(\vec{u})$  présentant des termes  $>0$  et des termes  $<0$ , il existe alors un ensemble des directions  $\vec{u}$  tels que  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}}(\vec{u}) = 0$ . Cet ensemble forme une variété conique de dimension  $n-1$  (avec  $n$  nombre de variables  $Z_p$ ) et qui sépare l'espace des directions  $\vec{u}$  en 2 régions: d'un côté (+) de cette variété conique on trouvera  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}}(\vec{u}) > 0$ , et de l'autre côté (-) de cette variété conique  $\delta^2 \dot{\mathbf{W}}(\vec{u}) < 0$ .
- Lorsque le nombre de variables se réduit à 2, cette variété conique se réduit à 2 droites.

### Annexe 6-2 : Fonctions $E(D, t_0, t)$ satisfaisant les 5 propriétés de la section 6.2.1

- Les propriétés a) et b) de la section 6.2.1 font que  $E$  contient une intégrale par rapport au temps, et par rapport au domaine matériel, et doit être de la forme:

$$E(D, t_0, t) = \frac{1}{m_D} \int_{t_0}^t \left\{ \int_D f\{\underline{\dot{\mathbf{E}}}\} dv \right\} d\tau$$

- La fonction  $f$  dans l'intégrale doit elle même vérifier les 3 propriétés c), d), e) du §6.2.1 et doit bien entendu être objective, donc (propriété d)) formée avec des invariants de degré 1 du tenseur  $\underline{\dot{\mathbf{E}}}$ , qui soient naturellement compatibles avec l'hétérogénéité:  $f\{\underline{\dot{\mathbf{E}}}\} = f\{\overline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}\}$
- Le seul invariant de degré 1 toujours compatible, indépendamment de toute loi de comportement, est la Trace, car il s'agit d'une fonction linéaire. Toutefois cet invariant n'apporte rien ici, car il est directement lié au volume spécifique, dont on tient compte par ailleurs ( car  $Tr\{\underline{\dot{\mathbf{E}}}\} = -\frac{d}{dt} [Ln(v_s)]$ ). Il convient donc de trouver une autre fonction objective des taux de déformation, associée aux spécificités du problème, qui présente cette compatibilité.

Il se trouve que dans le cas de coaxialité simple (quand  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\dot{\epsilon}}$ , et donc aussi  $\underline{\pi}$ , ont le même repère propre localement, qui n'est pas nécessairement fixe) et dans un voisinage proche de la dissipation minimale, la norme  $N_{\parallel} \{ \underline{\dot{\epsilon}} \}$  s'avère compatible avec l'hétérogénéité, et donc, étant déjà positivement homogène de degré 1 par rapport à  $\underline{\dot{\epsilon}}$ , elle satisfait aux 3 propriétés c), d), e) du §6.2.1.

- Montrons cette compatibilité pour le cas du Mode I, de signature (+,-,-):
    - 1) on a vu au §2.1 que dans les conditions de coaxialité à repère propre fixe, la condition de signature de Mode attachée aux actions intérieures se trouve transférée aux taux de déformation, c'est à dire que, sur le domaine matériel, la signature de  $\underline{\dot{\epsilon}}$  est partout (+,-,-); cette propriété s'étend sans difficulté au cas de la coaxialité simple ;
    - 2) de plus, la direction propre portant l'unique valeur propre positive du tenseur local  $\underline{\dot{\epsilon}}$ , est la même dans tout le domaine (propriété du Mode I en dissipation minimale, avec coaxialité simple), et c'est donc aussi la direction propre portant l'unique valeur propre positive du tenseur moyen  $\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  ;
    - 3) il s'ensuit que sur cette direction propre (et sur celle là seulement) se trouve vérifiée la propriété: **la moyenne de l'unique valeur propre > 0 du tenseur local  $\underline{\dot{\epsilon}}$ , est bien l'unique valeur propre > 0 du tenseur moyen  $\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  ; ou encore  $\overline{(\dot{\epsilon}_1)} = (\overline{\dot{\epsilon}})_1$  ;**
    - 4) or, le Mode I vérifie toujours  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}^+ = \frac{1}{2} [Tr\{\underline{\dot{\epsilon}}\} + N_{\parallel} \{ \underline{\dot{\epsilon}} \}]$ ; la propriété montrée en 3) implique donc que  $\overline{Tr\{\underline{\dot{\epsilon}}\}} + \overline{N_{\parallel} \{ \underline{\dot{\epsilon}} \}} = Tr\{\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}\} + N_{\parallel} \{ \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}\} ;$
    - 5) comme la Trace, opérateur linéaire, vérifie toujours  $\overline{Tr\{\underline{\dot{\epsilon}}\}} = Tr\{\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}\}$ , il s'ensuit donc que  $\boxed{N_{\parallel} \{ \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}\} = \overline{N_{\parallel} \{ \underline{\dot{\epsilon}} \}}}$ , qui est la propriété de compatibilité que nous cherchions.
  - Un raisonnement symétrique conduit au même résultat pour le Mode II
  - Notons qu'en déformation plane, de signature (+,0,-), nous aurons  $\frac{1}{2} N_{\parallel} \{ \underline{\dot{\epsilon}} \} = \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{2}$ , qui est le taux de cisaillement maximal (en déformation plane)  $\dot{\gamma}$ .
  - Ce qui précède fait aussi apparaître d'autres invariants symétriques du 1<sup>er</sup> degré, possédant les 3 propriétés requises:
    - en Mode I (+,-,-), l'invariant  $Sup\{\dot{\epsilon}_i\} = \dot{\epsilon}_1 = \frac{1}{2} [Tr\{\underline{\dot{\epsilon}}\} + N_{\parallel} \{ \underline{\dot{\epsilon}} \}]$
    - en Mode II (+,+,-), l'invariant  $-Inf\{\dot{\epsilon}_i\} = -\dot{\epsilon}_3 = -\frac{1}{2} [Tr\{\underline{\dot{\epsilon}}\} - N_{\parallel} \{ \underline{\dot{\epsilon}} \}]$
- Toutefois ces invariants sont *spécifiques* à chacun des Modes de dissipation minimale.
- L'ensemble de cette discussion mène à choisir la solution la plus simple, valable dans tous les Modes, et qui se rattache en déformation plane à une grandeur particulièrement significative:

$$\boxed{E(D, t_0, t) = \frac{1}{m_D} \int_{t_0}^t \left\{ \int_D \frac{1}{2} [N_{\parallel} \{ \underline{\dot{\epsilon}} \}] dv \right\} d\tau}$$

## ANNEXES AU CHAPITRE 7

**Extremum de la Variance dans le cas d'une famille de bandes de localisation**

$$\text{Var}(\dot{\gamma}, n) \approx \bar{\dot{\gamma}}^2 \left[ \frac{kL}{2} \cdot \sum_1^n \left( \frac{L_i}{L} \right)^2 - 1 \right]$$

où le taux de cisaillement moyen  $\bar{\dot{\gamma}}$ , le coefficient  $k$  et la largeur  $L$  sont fixés, et avec  $\sum L_i = L$ .

**-Maximum:** remarquons que si  $n > 1$ , alors tous les  $\frac{L_i}{L}$  sont strictement  $< 1$ , donc pour tout  $i$

$$\left( \frac{L_i}{L} \right)^2 < \frac{L_i}{L} \quad \text{d'où} \quad \sum_1^n \left( \frac{L_i}{L} \right)^2 < \sum_1^n \left( \frac{L_i}{L} \right) = 1$$

Le maximum est atteint lorsque  $n=1$ , c'est à dire lorsque la famille se réduit à une seule bande.

**-minimum:** posons  $u_i = \frac{L_i}{L} - \frac{1}{n}$ , la somme de ces écarts étant donc nulle  $\sum_1^n u_i = 0$ , alors

$$\sum_1^n \left( \frac{L_i}{L} \right)^2 = n \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \cdot \sum u_i + \sum u_i^2 = \frac{1}{n} + \sum u_i^2 \geq \frac{1}{n}$$

Le minimum est atteint lorsque les  $u_i$  sont tous nuls, c'est à dire que les  $n$  bandes sont de largeurs égales



## Références

- [1] GOGUEL, J., *Introduction à l'étude mécanique des déformations de l'écorce terrestre* – 1943 – Imprimerie Nationale-Paris
- [2] GOGUEL, J., *Etude mécanique des déformations géologiques* -1983 - Collection Manuels et Méthodes, Ed. BRGM, Orléans
- [3] COULOMB, C.A., «Essai sur une application des règles de Maximis & Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture » -1773- *Mém. Acad. Roy. Près. divers savants*, Vol 7, Paris
- [4] TERZAGHI, K. *Theoretical soil mechanics* -1943- Wiley & Sons, New York
- [5] SALENCON, J., *Calcul à la rupture et analyse limite* -1983 – Presses des Ponts et Chaussées, Paris
- [6] DESRUES, J.; CHAMBON, R.; MOKNI, M.; MAZEROLLE, F. « Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computed tomography » -1996- *Géotechnique* **46**, N°3, 529-546, London
- [7] ALSHIBLI, K.A.; BATISTE, S.; STURE, S. « Strain localization in sand : Plane Strain versus Triaxial Compression » - 2003 – *ASCE J. of Geotechn. and Geoenvironm. Engnrg.* Vol **129**, N°6, 483-494
- [8] ODA, M.; KAZAMA, H. « Microstructure of shear bands and its relation to the mechanisms of dilatancy and failure of dense granular soils » -1998 - *Géotechnique* **48**, N°4, 465-481, London
- [9] NEMAT-NASSER, S.; OKADA, N. « Radiographic and microscopic observation of shear bands in granular materials » - 2001 - *Géotechnique* **51**, N°9, 753-765, London
- [10] HILL, R. « The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals » -1967- *J. Mech. Phys. Solids*, Vol 15, 79-95
- [11] MANDEL, J. « Conditions de stabilité et postulat de Drücker » -1966- *Rheology and Soil Mechanics* , 58-68, Ed. Springer
- [12] RICE, J.R. ; RUDNICKI, J.W. ; « Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials » -1975- *J. Mech. Phys. Solids* Vol **23**, 371-394
- [13] PASTOR-PEREZ, M.; « Rotura por localizacion en gomateriales. I- Aspectos fisicos y experimentales » -1993 – *Ingenieria Civil*, N° **90**, 95-104, Madrid
- [14] PASTOR-PEREZ, M.; « Rotura por localizacion en gomateriales. II- Aspectos matematicos » -1993 – *Ingenieria Civil*, N° **91**, 107-112, Madrid
- [15] BORJA, I.R.; LAI, T.Y. « Propagation of localization instability under active and passive loading » - 2002 – *ASCE J. of Geotechn. and Geoenvironm. Engnrg.* Vol **128**, N°1, 64-75
- [16] CAMBOU, B.; JEAN, M. *Micromécanique des matériaux granulaires* – 2001 – Hermes Science, Paris
- [17] FROSSARD, E. « L'approche énergétique en mécanique des milieux granulaires » -2001- *Poudres & Grains*, N° NS 2, 1-56, Paris
- [18] FROSSARD, E. « Une équation d'écoulement simple pour les matériaux granulaires » - 1983- *Géotechnique* **33**, N°1, 21-29, London
- [19] FROSSARD, E. « Dilatance, dissipation d'énergie et critère de rupture sous grandes déformations, dans les matériaux granulaires » - 1986- *Revue Française de Géotechnique*, N° **34**, p17-31, Paris
- [20] FROSSARD, E. « Effect of sand grain shape on interparticle friction : indirect measurements by Rowe's stress-dilatancy theory - 1979- *Géotechnique* **29**, N°3, 341-350, London ; discussion by W.B. WHALLEY (1981), **31**, 161-165.
- [21] GERMAIN, P. *Cours de Mécanique – Tome II*- 1986- Ed. Ecole Polytechnique / Collection Ellipses, Paris
- [22] DARVE, F. « Lois de comportement des sols sous sollicitations tridimensionnelles et cycliques » -1983- (C.R. Réunion-débat du 23-03-1983) in *Annales de l'ITBTP* N° 432, Paris
- [23] BIAREZ, J. ; WENDIECK, K. «La comparaison qualitative entre l'anisotropie mécanique et l'anisotropie de structure des milieux pulvérulents »-1963 – C.R.Acad. Sc. N°254, 2712-2714, Paris
- [24] ARTHUR, J.R.F. ; CHUA, K.S. ; DUNSTAN, T. « Induced anisotropy in a sand » -1977- *Géotechnique* **27**, N°1, 13-30, London
- [25] ROTHENBURG, L. ; BATHURST, R.J. « Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials » -1989- *Géotechnique* **39**, N°4, 601-614, London
- [26] VARDOULAKIS, I. ; GRAF, B. « Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments »-1985- *Géotechnique* **35**, N°3, 299- 317, London
- [27] BOLTON, M.D. « The strength and dilatancy of sands »-1986- *Géotechnique* **36**, N°1, 65-78, London
- [28] ROSCOE, K.H. « The influence of strains in soil mechanics »-1970- *Géotechnique* **20**, N°2, 129-170, London

- [29] ARTHUR, J.R.F. ; DUNSTAN,T. ; AL-ANI, Q.A. ; ASSADI,A. « Plastic deformation and failure in granular media »-1977- *Géotechnique* **27**, N°1, 53-74, London
- [30] VERMEER,P.A. « The orientation of shear bands in biaxial tests »-1990- *Géotechnique* **40**, N°2, 223-236, London
- [31] LANDAU,L.; LIFCHITZ,E. *Physique Statistique* – 1994 – 4<sup>ème</sup> édition française, Ed. Mir/Ellipses, Paris
- [32] BENJAMIN,J.R. ; CORNELL, C.A. *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*- 1970 – Mc Graw- Hill, New York
- [33] CRESSWELL, A., POWRIE, W. “Triaxial tests on an unbonded locked sand”- 2004- *Géotechnique* **54**, N°2, 107-115, London
- [34] PRIGOGINE, I., STENGERS,I. *La nouvelle alliance*-1986- Gallimard, 2° ed. Paris.
- [35] PRIGOGINE,I, KONDEPUDI,D, *Thermodynamique*- 1999- Ed.Odile Jacob- Paris
- [36] GUDEHUS, G., NÜBEL, K. “Evolution of shear bands in sand”- 2004- *Géotechnique* **54**, N°3, 187-202, London
- [37] NOUGUIER-LEHON,C., CAMBOU,B., VINCENS,E., « Influence of particle shape and angularity on the behaviour of granular materials: a numerical analysis» -2003- *Int. J. Numer. Meth. Geomech.***27**, 1207-1226.

---oOo---

**TABLE DES MATIERES**

<b>INTRODUCTION</b>	6
<b>Chapitre 1. COMPATIBILITE DE L'APPROCHE ENERGETIQUE AVEC L'HETEROGENEITE DES ACTIONS INTERIEURES – RELATIONS ENTRE PROPRIETES LOCALES ET PROPRIETES MOYENNES</b>	12
<b>1.1 LE MILIEU DISCONTINU AU VOISINAGE PROCHE DE LA DISSIPATION MINIMALE</b>	12
1.1.1 Conditions physiques particulières	
1.1.2 Représentation de l'hétérogénéité admissible	
<b>1.2 MILIEU DISCONTINU AVEC REALIMENTATION INTERNE DISTRIBUTIONS STATISTIQUES D'ACTIONS DE CONTACT</b>	14
1.2.1 Système de conditions sur la distribution des actions de contact	
1.5.2 Allure générale des distributions	
1.5.3 Compatibilité avec les fluctuations d'hétérogénéité	
<b>1.3 LE MILIEU CONTINU EQUIVALENT AU VOISINAGE PROCHE DE LA DISSIPATION MINIMALE</b>	22
1.3.1 Conditions physiques particulières	
1.3.2 Représentation de l'hétérogénéité admissible	
<b>1.4 CONCLUSIONS SUR LA COMPATIBILITE AVEC L'HETEROGENEITE DES ACTIONS INTERIEURES</b>	23
1.4.1 Au voisinage proche de la dissipation minimale	
1.4.2 Situations avec réalimentation interne	
<b>Chapitre 2. COMPATIBILITE DE L'APPROCHE ENERGETIQUE AVEC L'HETEROGENEITE EN CONTRAINTE ET EN VITESSE DE DEFORMATION</b>	26
<b>2.1 CAS DE LA COAXIALITE - CONDITIONS PHYSIQUES PARTICULIERES-</b>	27
2.1.1 Compatibilité avec la localisation seule	
2.1.2 Compatibilité avec les chaînons de contraintes seuls	
2.1.3 Compatibilité avec la présence simultanée de localisations de déformations et de chaînons de contraintes	
2.1.4 Conclusions sur le cas coaxial avec repère propre fixe	
<b>2.2 COMPATIBILITE AVEC L'HETEROGENEITE EN CONTRAINTES ET EN DEFORMATIONS – CAS GENERAL-</b>	33
2.2.1 Relations entre hétérogénéités des actions intérieures et fluctuations locales en contraintes et déformations	
2.2.2 Propriétés particulières des mouvements proches de la dissipation minimale – hétérogénéités admissibles –	
2.2.3 Conditions nécessaires et suffisantes sur les covariances – Expressions analytiques –	
2.2.4 Causes physiques directes	
2.2.5 Condition suffisante isotrope	
<b>2.3 CONCLUSIONS SUR LA COMPATIBILITE AVEC L'HETEROGENEITE EN CONTRAINTE ET EN VITESSES DE DEFORMATION</b>	41
<b>Chapitre 3. ORIENTATION DES BANDES DE LOCALISATION ET DES CHAINONS DE CONTRAINTES</b>	43
<b>3.1 MOUVEMENTS A VOLUME STATIONNAIRE</b>	44
3.1.1 Orientation de la surface de localisation	
3.1.2 Orientation des chaînons de contraintes actifs, dans la bande de localisation	

3.1.3	Conclusions sur les mouvements à volume stationnaire	
<b>3.2</b>	<b>MOUVEMENTS A VOLUME VARIABLE</b>	45
3.2.1	Mouvements de dilatance par séparation	
3.2.2	Mouvements de dilatance par basculement	
3.2.3	Confrontation avec les résultats expérimentaux publiés	
3.2.4	Conclusions sur les mouvements à volume variable	
<b>Chapitre 4.</b>	<b>STRUCTURES INTERNES MACROSCOPIQUES DANS LES BANDES DE LOCALISATION</b>	53
<b>4.1</b>	<b>STRUCTURES CINEMATIQUES STATIONNAIRES DANS LES BANDES DE LOCALISATION</b>	53
4.1.1	Représentation du mouvement	
4.1.2	Relations de similitude interne cinématique: l'équation de structure stationnaire dans la bande	
4.1.3	Solutions complètement stationnaires	
4.1.4	Confrontation aux résultats expérimentaux de S.Nemat-Nasser et N. Okada (2001)	
<b>4.2</b>	<b>UN MICROMECHANISME ENERGETIQUE INTERNE AUX BANDES DE CISAILLEMENT</b>	58
4.2.1	L'effet de réalimentation interne	
4.2.2	Le micromécanisme et son bilan énergétique	
4.2.3	Profil du taux de dissipation	
4.2.4	Profil correspondant des taux de cisaillement- Expression de la constante matérielle $k$	
4.2.5	Largeur effective des bandes de localisation	
<b>4.3</b>	<b>CONSEQUENCES SUR LE DEVELOPPEMENT DES BANDES DE LOCALISATION</b>	65
4.3.1	Bornes du développement d'une bande de localisation	
4.3.2	Coexistence de plusieurs bandes parallèles	
<b>Chapitre 5.</b>	<b>STRUCTURES INTERNES DES CHAINONS DE CONTRAINTES</b>	69
5.1	ROLE DE LA CONDITION D'EQUILIBRE STATIQUE	
5.2	SOLUTIONS PARTICULIERES REMARQUABLES DE LA CONDITION D'EQUILIBRE STATIQUE	
5.3	STRUCTURE TRANSVERSALE DES CHAINONS DE CONTRAINTES MACROSCOPIQUES	
5.4	LIMITATIONS MACROSCOPIQUES DUES AU CRITERE DE RUPTURE	
5.5	CONTRASTES D'ECHELLES ENTRE BANDES DE LOCALISATION ET CHAINONS DE CONTRAINTES	
5.6	INCIDENCES SUR LA COMPATIBILITE AVEC L'HETEROGENEITE SIMULTANEE EN CONTRAINTES ET DEFORMATIONS	
<b>Chapitre 6.</b>	<b>CONDITIONS DE DEVELOPPEMENT DE L'HETEROGENEITE – CRITERE DE LOCALISATION –</b>	77
<b>6.1</b>	<b>CONDITIONS DE DEVELOPPEMENT DE L'HETEROGENEITE</b>	77
6.1.1	Représentation par les variables internes	
6.1.2	Expression du taux de dissipation spécifique	
6.1.3	Conditions de développement/atténuation de l'hétérogénéité	
<b>6.2</b>	<b>CRITERE DE LOCALISATION</b>	82
6.2.1	Représentation de l'évolution en déformation, au cours du mouvement	
6.2.2	Diagrammes expérimentaux du taux de dissipation spécifique	
6.2.3	Interprétation des résultats	
6.2.4	Conclusions sur le Critère de Localisation	

**Chapitre 7. EVOLUTION DES BANDES DE LOCALISATION - FORMATION DE LIGNES DE RUPTURE –** 91

<i>7.1 CADRE ANALYTIQUE</i>	91
<i>7.2 EVOLUTION D'UNE BANDE DE LOCALISATION SIMPLE</i>	93
<i>7.3 EVOLUTION D'UNE FAMILLE DE BANDES DE LOCALISATION PARALLELES</i>	94
<i>7.4 CONCLUSION: FORMATION DES LIGNES DE RUPTURE</i>	95

**Chapitre 8. CONCLUSIONS** 96

**ANNEXES.....** 98

<i>ANNEXES AU CHAPITRE 1</i>	98
------------------------------	----

<i>ANNEXES AU CHAPITRE 2</i>	103
------------------------------	-----

<i>ANNEXES AU CHAPITRE 3</i>	108
------------------------------	-----

<i>ANNEXES AU CHAPITRE 4</i>	110
------------------------------	-----

<i>ANNEXES AU CHAPITRE 6</i>	111
------------------------------	-----

<i>ANNEXES AU CHAPITRE 7</i>	114
------------------------------	-----

**REFERENCES** 115