

2 COMPATIBILITE DE L'APPROCHE ENERGETIQUE AVEC L'HETEROGENEITE EN CONTRAINTES ET EN VITESSES DE DEFORMATION

Les tenseurs des actions intérieures sont formés par le produit symétrique (contracté) des tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation. Ce qui précède montre que, en dissipation minimale, les produits symétriques des tenseurs locaux $\underline{\sigma}_{(M)}$ et $\underline{\dot{\epsilon}}_{(M)}$, ainsi que la moyenne sur D de ces produits, vérifient la même équation de dissipation.

Or :

- les **mesures** accessibles usuellement dans l'expérimentation mécanique en laboratoire sur ces milieux, ne concernent pas les tenseurs **locaux** $\underline{\sigma}_{(M)}$ et $\underline{\dot{\epsilon}}_{(M)}$, mais bien les tenseurs **moyens** $\overline{\underline{\sigma}}_{(D)}$ et $\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)}$;
- l'expérience physique montre que, dans un large éventail de conditions expérimentales couvrant les sollicitations sous contraintes axissymétriques, la déformation plane, avec ou sans rotation d'axes, et des sollicitations cycliques tridimensionnelles de large amplitude, **l'équation de la dissipation minimale apparaît pourtant vérifiée par le produit des tenseurs moyens** [18], [19], ce constat expérimental porte en particulier sur les manifestations directes de l'équation de la dissipation minimale, telles que les relations contraintes-dilatance, l'existence d'un "domaine caractéristique", celle d'un Critère de Rupture, etc.;
- outre ces manifestations *qualitatives*, ce constat expérimental porte aussi sur des manifestations *quantitatives*: l'utilisation de l'équation de dissipation minimale, pour évaluer indirectement un coefficient de friction physique moyen entre granulats, donne des résultats cohérents avec d'autres méthodes de mesures, pour des milieux monominéraux [20].

Pourtant rien ne garantit a priori que ce produit des tenseurs moyens vérifie, de manière générale, la même relation constitutive que la moyenne des produits des tenseurs locaux.

Dans la majeure partie des résultats expérimentaux évoqués plus haut, il se trouve (voir Annexe 2.1) que les conditions aux limites imposées assurent que, par construction, produits des moyennes et moyennes des produits sont identiques vis à vis de l'équation de dissipation, au moins au 1^{er} ordre.

Nous pourrions alors être tentés d'en conclure que ce sont les conditions extérieures, qui induisent cette forme particulière de compatibilité; toutefois:

- cela reviendrait à conclure que les *conditions internes* qui en résultent, c'est à dire une structure particulière des covariances entre contraintes et taux de déformation, peuvent être *induites de l'extérieur* par simple contact, ce qui est physiquement douteux;
- de plus, il existe des résultats expérimentaux qui vérifient apparemment cette propriété, mais pour lesquels l'identité produit des moyennes / moyenne des

produits, n'est pas imposée par les conditions aux limites (déformation plane avec rotation d'axes en "simple shear", par exemple).

Ce constat pose donc la double question:

- pourquoi **les produits des moyennes**, vérifient la même relation constitutive (l'équation de dissipation minimale) que les **moyennes des produits** ?
- quelles conditions sur les fluctuations locales en contraintes et vitesses de déformation, font qu'il en est ainsi ?

Ces questions sont plus complexes que la précédente, car elles portent sur les relations entre six tenseurs, incluant les tenseurs locaux $\underline{\sigma}_{(M)}$ et $\underline{\dot{\epsilon}}_{(M)}$ et les tenseurs moyens $\overline{\underline{\sigma}}_{(D)}$ et $\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)}$, en plus des deux précédents (le tenseur local $\underline{\pi}_{(M)}$ et le tenseur moyen $\overline{\underline{\pi}}_{(D)}$).

Nous les aborderons progressivement, en analysant d'abord le cas le plus simple, lorsque les six tenseurs ont le même repère propre (coaxialité à repère propre fixe), avant d'aborder le cas général.

2.1 CAS DE LA COAXIALITE - CONDITIONS PHYSIQUES PARTICULIERES

En situation de coaxialité simple, les tenseurs locaux $\underline{\sigma}_{(M)}$ et $\underline{\dot{\epsilon}}_{(M)}$ ont leurs directions propres communes, qui sont alors aussi directions propres pour $\underline{\pi}_{(M)}$, et forment le repère propre *local*. D'un point à l'autre d'un domaine proche des conditions de la dissipation minimale, ces repères propres locaux ont toujours en commun au moins une direction propre signée (cf section précédente), et se déduisent donc les uns des autres par simple rotation autour de cet axe propre commun.

Pour les tenseurs moyens, les repères propres de $\overline{\underline{\sigma}}_{(D)}$ et $\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)}$ diffèrent donc du repère propre de $\overline{\underline{\pi}}_{(D)}$, par des rotations simples autour de cet axe propre commun.

En situation de **coaxialité à repère propre fixe**, ce paramètre de rotation disparaît, les repères propres des tenseurs locaux et moyens sont identiques, et donc $\overline{\underline{\sigma}}_{(D)}$ et $\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)}$ ont le même repère propre que les $\underline{\sigma}_{(M)}$ et $\underline{\dot{\epsilon}}_{(M)}$ d'une part, et d'autre part ce repère propre commun est aussi commun à $\overline{\underline{\pi}}_{(D)}$ et aux $\underline{\pi}_{(M)}$.

Remarquons qu'en déformation plane, pour un mouvement proche de la dissipation minimale, la section précédente a montré que le repère propre des actions intérieures est de toutes façons fixe sur le domaine. Dans une situation de déformation plane, la coaxialité simple des contraintes et vitesses de déformations implique donc la coaxialité à repère propre fixe.

Dans ce repère propre fixe, nous pouvons décrire l'hétérogénéité des tenseurs locaux directement sur leurs valeurs propres, par des fonctions de fluctuations locales, et donc l'hétérogénéité des contraintes locales par:

$$\sigma_{i(M)} = \overline{\sigma}_{i(D)} \cdot (1 + \zeta_{i(M)}) \text{ avec } \int_D \zeta_{i(M)} dv = 0.$$

La **condition de non-traction** impose que les contraintes normales, et donc aussi les contraintes principales, demeurent en compression, localement et en moyenne; leurs fonctions de fluctuations locales vérifient donc $0 \leq 1 + \zeta_i(M)$.

Nous pouvons également décrire l'hétérogénéité des vitesses de déformation locales par: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(M) = \overline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(D)} \cdot (1 + \eta_i(M))$ avec $\int_D \eta_i(M) dv = 0$.

Par ailleurs, par définition des actions intérieures $\boldsymbol{\pi}_i(M) = \boldsymbol{\sigma}_i(M) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(M)$, la **condition de signature de Mode** vue précédemment, impose que les valeurs propres des actions intérieures ne changent pas de signe sur le domaine . Comme les contraintes principales demeurent positives (non-traction), il s'ensuit que les fonctions de fluctuations locales en vitesses de déformation, vérifient $0 \leq 1 + \eta_i(M)$, ce qui revient à transférer aux vitesses de déformation la condition de signature de Mode.

En résumé, sur un domaine proche des conditions de la dissipation minimale, les conditions de non-traction et de signature de Mode imposent que, en situation de coaxialité avec repère propre fixe, les hétérogénéités locales en vitesses de déformation et en contraintes, vérifient, sur chacune des directions propres:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(M) = \overline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(D)} \cdot (1 + \eta_i(M)) \text{ avec } 0 \leq 1 + \eta_i(M) \text{ et } \int_D \eta_i(M) dv = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_i(M) = \overline{\boldsymbol{\sigma}_i(D)} \cdot (1 + \zeta_i(M)) \text{ avec } 0 \leq 1 + \zeta_i(M) \text{ et } \int_D \zeta_i(M) dv = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Les fluctuations relatives ne sont donc pas limitées du côté des valeurs positives, par contre elles sont bornées du côté des valeurs négatives, *de manière totalement symétrique* entre vitesses de déformation et contraintes.

Arrêtons-nous à la signification concrète simple de ces conditions physiques sur l'hétérogénéité, pour des situations proches de la dissipation minimale:

- les valeurs propres locales sont toujours du même signe que les valeurs propres moyennes; c'est à dire que les grandeurs locales ne peuvent donc aller à contre-sens de la tendance moyenne (en ce qui concerne les valeurs propres);
- on ne pourra donc pas trouver localement de vitesses de déformations principales, à contre-sens de la vitesse de déformation moyenne;
- ceci correspond à l'expérience pratique sous conditions aux limites régulières (permettant d'approcher les conditions de la dissipation minimale): au cours d'un essai mécanique, on ne voit jamais une partie significative de l'échantillon se déformer à contre-sens de la moyenne.

Remarquons que cette dernière propriété, d'apparence banale, n'est pas anodine, elle doit être vue comme une spécificité de l'hétérogénéité mécanique des milieux granulaires. En effet, d'autres types d'hétérogénéité, telle par exemple la turbulence en hydrodynamique, permettent des valeurs locales de vitesse de déformation, à contre-courant de la valeur moyenne, sur une partie significative du domaine observé.

Cette hétérogénéité particulière au milieu granulaire est directement conséquence de la dissipation par friction, car les conditions qui l'encadrent résultent de la structure

induite dans les actions intérieures par les lois de la friction. La comparaison avec la turbulence en hydrodynamique, liée à la dissipation par viscosité, est instructive: elle montre qu'il y a bien une certaine correspondance entre le mode de dissipation d'énergie dans le milieu, et le type d'hétérogénéité mécanique qui peut s'y manifester. Enfin ce type d'hétérogénéité implique une autre particularité:

- la condition de somme nulle et la limitation des valeurs minimales sur le domaine, imposent que les fortes fluctuations, soient séparées par des "zones de calme", cette propriété s'applique en particulier aux hétérogénéités qui "émergent" à l'échelle macroscopique ;
- à valeur moyenne donnée, ces zones de calme seront donc d'autant plus grandes, et d'autant plus calmes, que les fluctuations sont fortes;
- les zones de concentration de la dissipation, qui sont les bandes de localisation des déformations, seront donc séparées par des zones inactives, d'autant plus grandes et inactives, que la dissipation dans la bande est forte;
- les chaînons de contraintes seront séparés par des zones déchargées, d'autant plus que les efforts conduits par les chaînons sont intenses.

Pour conclure sur le cadre de la coaxialité, rappelons que l'équation de la dissipation minimale s'écrit alors, dans le repère propre:

$$\sum_i \sigma_i \dot{\epsilon}_i = \sin \psi \cdot \sum_i |\sigma_i \dot{\epsilon}_i| \quad (2.2)$$

2.1.1 Compatibilité avec la localisation seule

Ici, nous nous intéressons aux seules hétérogénéités en vitesses de déformation, ce qui revient à considérer temporairement comme négligeables les hétérogénéités en contraintes (*celles-ci sont donc considérées comme homogènes*). La situation envisagée est proche des schémas classiques de localisation, Figure 2-1 .

Montrons que les conditions établies précédemment sont suffisantes pour que, *étant vérifiée localement*, l'équation de dissipation *se trouve aussi vérifiée par les valeurs moyennes* des contraintes et vitesses de déformation.

Considérons donc un domaine D en mouvement, sous contraintes homogènes, et dans lequel les vitesses de déformation principales présentent des variations aussi fortes que l'on voudra, mais tout en vérifiant les conditions (2.1).

Par intégration de l'équation locale sur le domaine, on peut écrire, dans le repère propre fixe:

$$\int_D \sum_i \sigma_{i(M)} \dot{\epsilon}_{i(M)} dv = \sin \psi \cdot \int_D \sum_i |\sigma_{i(M)} \dot{\epsilon}_{i(M)}| dv$$

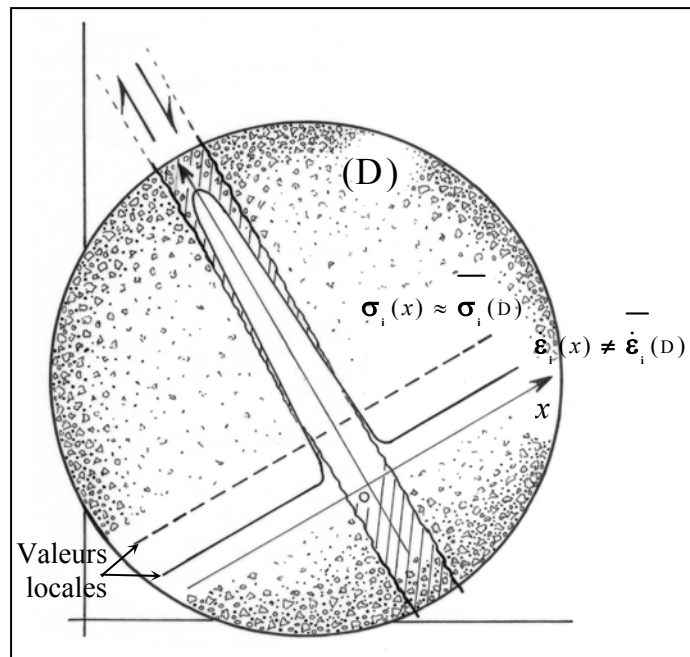
Les contraintes principales étant homogènes (égales aux valeurs moyennes), et toutes en compression (>0), peuvent être sorties de l'intégration, et des valeurs absolues, d'où:

$$\sum_i \overline{\sigma}_i^{(D)} \int_D \dot{\epsilon}_{i(M)} dv = \sin \psi \cdot \sum_i \overline{\sigma}_i^{(D)} \int_D |\dot{\epsilon}_{i(M)}| dv$$

En l'absence de changement de signe des $\dot{\epsilon}_i$ sur D , on peut également faire apparaître les valeurs moyennes des vitesses de déformation, malgré la présence de fortes fluctuations, car les conditions (2.1) font que:

$$\int_D |\dot{\underline{\epsilon}}_i| dv = \left| \int_D \dot{\underline{\epsilon}}_i dv \right| = V_{(D)} \left| \overline{\dot{\underline{\epsilon}}_i}^{(D)} \right|$$

Figure 2-1 Localisation de déformations sous contraintes homogènes.



En remplaçant dans l'expression précédente, il vient finalement:

$$\sum_i \overline{\sigma_i}^{(D)} \overline{\dot{\epsilon}_i}^{(D)} = \sin \psi \cdot \sum_i \left| \overline{\sigma_i}^{(D)} \overline{\dot{\epsilon}_i}^{(D)} \right| \quad (2.3)$$

Cette expression n'est autre que l'équation de dissipation minimale, mais écrite avec **les valeurs moyennes sur D des contraintes et vitesses de déformation.**

Observons que ce résultat est tout à fait indépendant d'une éventuelle structure géométrique attachée à la localisation, comme par exemple l'orientation des bandes de cisaillement. Il provient de la structure algébrique très particulière de l'équation de dissipation, car les conditions (2.1) font que:

Sur un domaine matériel proche des conditions de la dissipation minimale, l'équation de dissipation devient une simple forme bilinéaire par rapport aux tenseurs $\underline{\sigma}^{(M)}$ et $\underline{\dot{\epsilon}}^{(M)}$.

Pourvu que les fluctuations locales de $\underline{\sigma}^{(M)}$ et $\underline{\dot{\epsilon}}^{(M)}$ ne soient pas significativement corrélées, l'équation aux valeurs moyennes s'obtient alors directement comme moyenne de l'équation aux valeurs locales.

2.1.2 Compatibilité avec les chaînons de contraintes seuls

Nous pouvons nous intéresser ensuite aux seules hétérogénéités en contraintes, ce qui revient à considérer temporairement comme négligeables les hétérogénéités en vitesses de déformation (*celles-ci sont donc considérées comme homogènes*). La situation peut être traitée de manière symétrique de la précédente sans difficulté: l'équation de dissipation et les conditions (2.1) étant complètement symétriques entre

contraintes et vitesses de déformation, la démonstration est en tous points symétrique de la précédente.

2.1.3 Compatibilité avec la présence simultanée de localisations de déformations et de chaînons de contraintes

Considérons maintenant une hétérogénéité mixte assez générale, du type envisagé plus haut (section 2.1) incluant:

- a) une composante d'hétérogénéité anisotrope en contrainte $\zeta_i(M)$ ($i=1,2,3$), et une autre en vitesses de déformation $\eta_i(M)$, sans corrélation spatiale entre hétérogénéité en contrainte et hétérogénéité en déformation sur une même direction propre;
- b) une composante d'hétérogénéité isotrope, $\zeta_0(M), \eta_0(M)$, avec éventuellement une corrélation spatiale entre hétérogénéités en contraintes et en déformations;
- ces deux composantes a) et b) n'étant pas corrélées entre elles.

La forme analytique correspondante est, compte tenu des conditions de signature de Mode et de non-traction: (2.4)

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(M) = \overline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(D)} [1 + \eta_i(M) + \eta_0(M)] \text{ avec } 0 \leq 1 + \eta_i(M) + \eta_0(M) \text{ et } \int_D [\eta_i(M) + \eta_0(M)] dv = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_i(M) = \overline{\boldsymbol{\sigma}_i(D)} [1 + \zeta_i(M) + \zeta_0(M)] \text{ avec } 0 \leq 1 + \zeta_i(M) + \zeta_0(M) \text{ et } \int_D [\zeta_i(M) + \zeta_0(M)] dv = 0 \end{cases}$$

$$\text{avec, pour tout } i \begin{cases} \int_D \eta_i(M) \zeta_i(M) dv = 0 \\ \int_D \eta_i(M) \zeta_0(M) dv = 0 \\ \int_D \eta_0(M) \zeta_i(M) dv = 0 \end{cases}$$

Observons que pour ces composantes anisotropes:

- rien ne limite la présence de structures de concentrations de déformations organisées dans l'espace (corrélations spatiales entre les η_i , telles que $\int_D \eta_i \eta_j dv \neq 0$) telles, par exemple, des systèmes de bandes de cisaillement;
- rien ne limite la présence de structures de concentrations de contraintes organisées dans l'espace (corrélations spatiales entre les ζ_i , telles que $\int_D \zeta_i \zeta_j dv \neq 0$) telles, par exemple, des réseaux de chaînons de contraintes;
- rien ne limite, en un point donné, la corrélation temporelle momentanée, entre hétérogénéités de contraintes et de déformations, pour une même direction.

Remarquons aussi que pour les composantes isotropes, en cas de présence simultanée en un même "point" d'une bande de cisaillement et d'un chaînon de contrainte, aucune condition ne restreint l'intensité ou l'orientations des gradients des hétérogénéités locales $\eta_0(M)$ et $\zeta_0(M)$, qui sont orthogonaux aux directions locales respectives de la bande de cisaillement et du chaînon de contraintes.

Par intégration sur tout le domaine de l'équation de dissipation locale avec de telles hétérogénéités, comme démontré en Annexe 2-2, nous obtiendrons encore la

même équation de dissipation, mais écrite avec les contraintes moyennes et vitesses de déformations moyennes.

La remarque faite plus haut sur les composantes isotropes, montre que la compatibilité trouvée ici est indépendante de l'orientation des bandes de cisaillement ou des chaînes de contraintes.

Nous verrons plus loin (section 2.2) que pour des raisons de cohérence thermodynamique, lorsque ces composantes isotropes sont corrélées, le rayon de corrélation ne peut pas être aussi grand que l'on veut.

2.1.4 Conclusions sur le cas coaxial avec repère propre fixe

Nous avons donc montré que, dans le cas de la coaxialité avec repère propre fixe, dans les conditions proches de la dissipation minimale, l'approche Energétique est bien compatibles avec la présence, séparément ou simultanément, de localisations des déformations et de chaînes de contraintes, Figure 2-2. Si l'équation de la dissipation minimale est valide sur les valeurs locales, elle l'est aussi sur les valeurs moyennes, dans certaines limites. Cette compatibilité est indépendante de l'orientation éventuelle des bandes de localisation ou des chaînes de contraintes, elle résulte seulement de la structure algébrique très particulière de l'équation de dissipation.

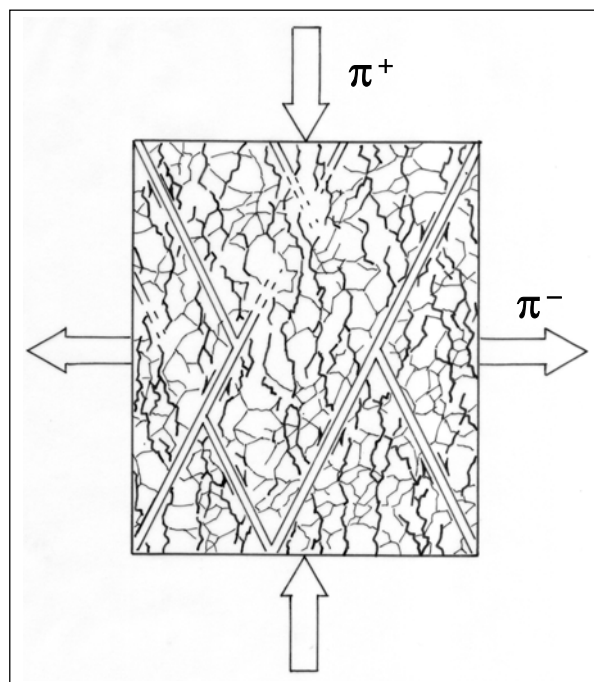


Figure 2-2: Schéma hétérogène mixte avec localisations de déformations et chaînes de contraintes.

Remarquons que le cas de la coaxialité avec repère propre fixe étant particulièrement restrictif par rapport au cas général, des ensembles d'hétérogénéités plus vastes deviendraient sans doute admissibles, en étendant ce type d'analyse au cas général.

Ici, dans le cas de la présence simultanée d'hétérogénéités en contraintes et vitesses de déformation, nous avons montré que cette compatibilité est assurée pour une gamme étendue d'hétérogénéités. Toutefois cette gamme comporte quelques limitations supplémentaires par rapport aux seules conditions physiques issues des propriétés de

la dissipation minimale, données en section 2.1.; ces limitations supplémentaires constituent des conditions *suffisantes* à la compatibilité.

Cette observation mène à la question des conditions *nécessaires et suffisantes* que doivent vérifier les hétérogénéités locales en contraintes et vitesses de déformation, pour que l'équation de dissipation demeure compatible avec l'hétérogénéité, dans le cas général de la dissipation minimale.

2.2 COMPATIBILITE AVEC LES HETEROGENEITES EN CONTRAINTES ET VITESSES DE DEFORMATION - CAS GENERAL –

2.2.1 Relations entre hétérogénéités des actions intérieures et fluctuations locales en contraintes et déformations

Pour aborder le cas général, sans aucune hypothèse de coaxialité, il convient de revenir aux actions intérieures, en les considérant comme une fonction des contraintes et des vitesses de déformation. En nous basant sur les propriétés particulières liées à la réalisation d'un minimum thermodynamique (*la moindre dissipation*), ainsi que celles des actions intérieures au voisinage de la dissipation minimale, vues au chapitre précédent, nous allons établir les conditions de compatibilité des hétérogénéités.

Toutefois, il convient au préalable de préciser l'expression des actions intérieures, en fonction des hétérogénéités en contraintes et en vitesses de déformations.

Le tenseur local des actions intérieures $\underline{\pi}_{(M)}$, est construit à partir des valeurs locales des tenseurs de contraintes et vitesses de déformation $\underline{\sigma}_{(M)}$ et $\underline{\dot{\epsilon}}_{(M)}$. Sur un domaine donné, la moyenne de ce tenseur des actions intérieures $\overline{\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$, n'est a priori pas toujours identique au tenseur construit avec les contraintes et déformations moyennes $\underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}})$.

Revenons alors aux contraintes et vitesses de déformations, et à leurs fluctuations locales par rapport aux valeurs moyennes

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{(M)} = \overline{\underline{\sigma}}_{(D)} + \tilde{\underline{\sigma}}_{(M)} \text{ avec } \int_D \tilde{\underline{\sigma}}_{(M)dv} = 0 \\ \underline{\dot{\epsilon}}_{(M)} = \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)} + \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(M)} \text{ avec } \int_D \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(M)dv} = 0 \end{cases}, \text{ qui permettent de définir,}$$

dans un repère donné $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les fluctuations locales du vecteur contrainte $\underline{\sigma}(\vec{i})$ (ou vitesse de déformation $\underline{\dot{\epsilon}}(\vec{j})$) pour une direction donnée

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(\vec{i}) = \overline{\underline{\sigma}}(\vec{i}) + \tilde{\underline{\sigma}}(\vec{i}) \\ \underline{\dot{\epsilon}}(\vec{j}) = \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{j}) + \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{j}) \end{cases}.$$

Comme par ailleurs, les composantes du tenseur des actions intérieures vérifient $\pi_{ij} = \frac{1}{2}[\underline{\sigma}(\vec{i}) \cdot \underline{\dot{\epsilon}}(\vec{j}) + \underline{\dot{\epsilon}}(\vec{i}) \cdot \underline{\sigma}(\vec{j})]$ (produits scalaires de vecteurs), nous pouvons alors exprimer les différences entre les composantes de $\underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}})$ et $\overline{\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$, en fonction des fluctuations locales en contraintes et vitesses de déformation:

$$\overline{\pi}_{ij}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}) - \pi_{ij}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}) = \frac{1}{2V(D)} \int_D [\tilde{\underline{\sigma}}(\vec{i}) \cdot \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{j}) + \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{i}) \cdot \tilde{\underline{\sigma}}(\vec{j})] dv.$$

Cette égalité exprime l'écart entre $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ et $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$, en fonction des **covariances** entre fluctuations locales des contraintes et des vitesses de déformations, sur le domaine considéré.

Désignons par $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}})$ la moyenne du produit symétrique contracté des fluctuations locales, la relation trouvée plus haut entre les composantes de $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ et $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ indique que ces tenseurs sont, avec nos définitions, liés par la relation: $\underline{\pi}(\underline{\sigma} + \underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}) = \underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}) + \overline{\underline{\pi}}(\underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}})$ (2.5).

Ces relations permettent alors de rechercher les conditions de compatibilité attachées à l'équation de la dissipation minimale, sous forme de conditions portant sur le tenseur $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}})$.

2.2.2 Propriétés particulières des mouvements proches de la dissipation minimale – Conditions sur les hétérogénéités admissibles-

Au cours du mouvement d'ensemble, les mouvements intérieurs locaux et les efforts intérieurs locaux fluctuent très rapidement. Ce caractère particulier aux milieux granulaires, dû à la (faible) part d'effets dynamiques toujours présente dans les mouvements "pseudo statiques", est largement confirmé par les simulations numériques détaillées de milieux à particules virtuelles discrètes (voir [16], par exemple). Pour des valeurs moyennes données, les valeurs locales admissibles peuvent donc être envisagées comme formant un ensemble dans lequel fluctue la configuration réelle.

Par ailleurs, nous avons vu (section 1.4) que pour les effets mécaniques décrits par l'Approche Energétique, la description des actions intérieures en mouvement hétérogène, peut être sans inconvénient résumée par les actions intérieures moyennes.

Mouvements proches de la dissipation minimale

Envisageons donc un domaine matériel en mouvement proche de la dissipation minimale, dans lequel nous considérons les actions intérieures moyennes $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}) = \underline{\pi}_0$ comme *données* (résultant des conditions aux limites).

Pour une configuration moyenne $\{\overline{\underline{\sigma}}_{(D)}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)}\}$ donnée, les écarts d'hétérogénéité locale admissibles $\{\underline{\tilde{\sigma}}_{(M)}, \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}_{(M)}\}$, c'est à dire tels que $\underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}_{(D)} + \underline{\tilde{\sigma}}_{(M)}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)} + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}_{(M)}) = \underline{\pi}_0$ donné (2.6), constituent un ensemble de solutions parmi lequel fluctue rapidement la configuration réelle, cet ensemble est centré sur les valeurs moyennes $\{\underline{0}, \underline{0}\}$ de ces écarts.

Or la Règle de moindre dissipation implique que la dissipation totale sur le domaine $V_{(D)}.Tr\{\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})\}$ doit demeurer au voisinage d'un minimum (voir Annexe 1-2). Les configurations d'hétérogénéité admissibles, réalisant ce même minimum, ici considéré comme *donné*, sont donc indifférentes pour la dissipation. Il s'ensuit que deux configurations quelconques d'hétérogénéité admissibles

$\{\underline{\tilde{\sigma}}^\alpha(M), \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}^\alpha(M)\}$ et $\{\underline{\tilde{\sigma}}^\beta(M), \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}^\beta(M)\}$, prises parmi les solutions associées aux mêmes valeurs moyennes $\{\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\}$, vérifient nécessairement

$$\overline{Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D) + \underline{\tilde{\sigma}}^\alpha(M), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D) + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}^\alpha(M)\right)\right\}} = \overline{Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D) + \underline{\tilde{\sigma}}^\beta(M), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D) + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}^\beta(M)\right)\right\}} = Tr\left\{\underline{\pi}_0\right\} \text{ donné}$$

(2.7.a) ou encore, en tenant compte de (2.5) et de la linéarité de la Trace,

$$Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\tilde{\sigma}}^\alpha(M), \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}^\alpha(M)\right)\right\} = Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\tilde{\sigma}}^\beta(M), \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}^\beta(M)\right)\right\} \quad (2.7.b).$$

De plus, tenant compte de la linéarité de la Trace, et de la propriété de la Norme N_{\parallel} vis à vis des actions intérieures au voisinage proche de la dissipation minimale (section 1.4), nous aurons toujours, compte tenu de (2.6):

$$\begin{cases} \overline{Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D) + \underline{\tilde{\sigma}}(M), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D) + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}(M)\right)\right\}} = Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D) + \underline{\tilde{\sigma}}(M), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D) + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}(M)\right)\right\} = Tr\left\{\underline{\pi}_0\right\} \text{ donné} \\ N_{\parallel} \left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D) + \underline{\tilde{\sigma}}(M), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D) + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}(M)\right)\right\} = N_{\parallel} \left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D) + \underline{\tilde{\sigma}}(M), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D) + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}(M)\right)\right\} = N_{\parallel} \left\{\underline{\pi}_0\right\} \text{ donné} \end{cases} \quad (2.8)$$

Conditions sur les hétérogénéités admissibles

A partir de ce point, deux situations se présentent:

- **A1** soit les valeurs moyennes $\{\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\}$ constituent en elles-mêmes une solution homogène admissible, vérifiant par définition

$$\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\right) = \underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\right) = \underline{\pi}_0 \text{ donné} \quad (2.9. a)$$

$$\text{d'où} \begin{cases} \overline{Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\right)\right\}} = Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\right)\right\} = Tr\left\{\underline{\pi}_0\right\} \text{ donné} \\ N_{\parallel} \left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\right)\right\} = N_{\parallel} \left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\right)\right\} = N_{\parallel} \left\{\underline{\pi}_0\right\} \text{ donné} \end{cases} \quad (2.9 b),$$

Une configuration d'hétérogénéités locales $\{\underline{\tilde{\sigma}}(M), \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}(M)\}$ admissible pour les valeurs moyennes $\{\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\}$, vérifie toujours (2.8); en rapprochant de (2.9 b), nous concluons directement que dans ce type de situation **A1**, une configuration quelconque d'hétérogénéité admissible vérifie donc les deux conditions:

$$\boxed{\begin{cases} \overline{Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D) + \underline{\tilde{\sigma}}(M), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D) + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}(M)\right)\right\}} = Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\right)\right\} \\ N_{\parallel} \left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D) + \underline{\tilde{\sigma}}(M), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D) + \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}(M)\right)\right\} = N_{\parallel} \left\{\underline{\pi}\left(\underline{\bar{\sigma}}(D), \underline{\bar{\dot{\epsilon}}}(D)\right)\right\} \end{cases}} \quad (2.10)$$

Par ailleurs, remarquons aussi que dans ce type de situation, la relation (2.7 b)

$$\text{devient:} \quad Tr\left\{\underline{\pi}\left(\underline{\tilde{\sigma}}(M), \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}}(M)\right)\right\} = 0 \quad (2.11)$$

- **B]** soit les valeurs moyennes, que nous noterons différemment pour distinguer les deux types de situations, $\left\{ \overline{\underline{\sigma}}^*_{(D)}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}^*_{(D)} \right\}$, ne constituent **pas** une solution homogène admissible, et donc

$$\overline{Tr \left\{ \underline{\pi} \left(\overline{\underline{\sigma}}^*_{(D)}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}^*_{(D)} \right) \right\}} \neq Tr \left\{ \underline{\pi}_0 \right\} \text{ donné}$$

par conséquent, une configuration quelconque d'hétérogénéités locales $\left\{ \tilde{\underline{\sigma}}^*_{(M)}, \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}}^*_{(M)} \right\}$ admissible avec ces valeurs moyennes, ne vérifie dans ce type de situation **B]** ni les conditions (2.10) ni la relation (2.11) .

Remarquons que, à $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ donné, on peut toujours construire une famille de solutions homogènes admissibles $\left\{ \overline{\underline{\sigma}}_{(D)}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)} \right\}$ répondant à la situation **A]**, le décompte des inconnues ($2 \times 6=12$) et conditions imposées (6 , hors conditions aux limites), montre que cette famille, hors conditions aux limites, possède en général 6 degrés de liberté.

De ce fait, cette famille n'est certainement **pas vide**: dans le cas le plus restrictif de la coaxialité à repère propre fixe, en se donnant $\underline{\pi}_0$, et des conditions aux limites régulières usuelles (1 contrainte normale, et 2 taux de déformations, ou vice versa) nous trouverions qu'il y a encore 1 solution, d'où, en utilisant la section 2.1.3, une large famille de solutions hétérogènes admissibles (en prenant ici des composantes $\zeta_0(M), \eta_0(M)$ non corrélées).

Les solutions de type **B]**, par contre, demeurent plus hypothétiques.

En conclusion, pour un domaine matériel en mouvement proche de la dissipation minimale, dans lequel nous considérons les actions intérieures moyennes $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ comme *données*, l'ensemble des solutions hétérogènes admissibles serait constitué par deux ensembles:

- a) d'un côté la famille (qui n'est pas vide) de solutions de type **A]**, dont la moyenne $\left\{ \overline{\underline{\sigma}}_{(D)}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)} \right\}$ appartient à l'ensemble des solutions admissibles, et qui vérifient les conditions de compatibilité (2.10);
- b) de l'autre côté la famille éventuelle des solutions de type **B]**, dont la moyenne $\left\{ \overline{\underline{\sigma}}^*_{(D)}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}^*_{(D)} \right\}$ n'appartient **pas** à l'ensemble des solutions admissibles, et qui ne vérifient **pas** les conditions de compatibilité (2.10).

L'ensemble des solutions hétérogènes admissibles, réalisant le même minimum thermodynamique que $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ donné, serait alors constitué par deux ensembles disjoints, possédant des propriétés contradictoires. Or nous avons vu que, au niveau des actions intérieures, l'ensemble des solutions hétérogènes admissibles, est un ensemble convexe régulier (section 1.4).

Cette apparente incohérence dans l'ensemble des solutions hétérogènes admissibles, réalisant le même minimum thermodynamique que $\overline{\boldsymbol{\pi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}})$ donné, se trouve résolue si, et seulement si:

Au voisinage de la dissipation minimale, seules sont observables les solutions hétérogènes de type \underline{A} , elles vérifient les conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} \overline{Tr \{ \boldsymbol{\pi}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \}} = Tr \{ \boldsymbol{\pi}(\overline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \overline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}) \} \\ \overline{N_{\parallel} \{ \boldsymbol{\pi}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \}} = N_{\parallel} \{ \boldsymbol{\pi}(\overline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \overline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}) \} \end{cases}$$

Il en résulte que:

- ***l'équation de la dissipation minimale, vérifiée localement, est aussi vérifiée par les valeurs moyennes $\{ \overline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \overline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \}$, en dépit de l'hétérogénéité;***
- ***à conditions moyennes données, l'ensemble des solutions hétérogènes admissibles demeure un convexe, vis à vis des actions intérieures.***

Notons que:

- a) la première de ces conditions de compatibilité est la classique “Condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel”[20], elle indique que la puissance moyenne des efforts intérieurs doit pouvoir s'exprimer à partir des contraintes et vitesses de déformations moyennes. Elle indique aussi que $\overline{\boldsymbol{\pi}}(\overline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \overline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}})$ est nécessairement un tenseur déviateur. Dans le cas de certains milieux granulaires, une démonstration directe (*le” lemme de Hill”, voir [16]*) en a été donnée par R.Hill, en s'appuyant sur les conditions d'équilibre statique, et pour des conditions aux limites régulières.
- b) la deuxième condition de compatibilité est spécifique au mode de dissipation d'énergie par friction dans les milieux granulaires, défini par l'Approche Energétique; nous la désignerons par: “Condition de compatibilité avec la dissipation par friction intergranulaire”; elle indique que la fonction de dissipation doit aussi pouvoir s'exprimer à partir des contraintes et vitesses de déformations moyennes.

Ces deux conditions, résumées dans notre hypothèse de base N°6, indiquent aussi que les hétérogénéités locales n'ont aucune incidence sur la puissance reçue (demi-somme de la Trace et de la Norme) ni sur la puissance rendue (demi-différence de la Trace et de la Norme), qui vérifient donc l'identité:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}^+(\overline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \overline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}) = \overline{\boldsymbol{\pi}^+(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}})} \\ \boldsymbol{\pi}^-(\overline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \overline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}) = \overline{\boldsymbol{\pi}^-(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}})} \end{cases}$$

Conditions nécessaires et suffisantes sur les covariances - Expression analytique -

Par ailleurs, ces puissances reçues et puissances rendues, qui sont des grandeurs physiques objectives, correspondent à des flux d'énergie, portés par des ensembles de directions vectorielles (voir Annexe 1.1) engendrés par les directions propres des

tenseurs correspondants. Pour que l'identité entre les puissances reçues d'une part, et d'autre part entre les puissances rendues, soit physiquement cohérente, il faut aussi que les directions (ou ensembles de directions) qui portent ces flux, soient identiques.

Il s'ensuit que, suivant le Mode de dissipation minimale:

- en Mode I, de signature (+,-,-), les puissances reçues doivent être portées par une même direction propre commune, tandis que les puissances rendues doivent être portées par un même plan vectoriel, engendré par les deux autres directions propres; les deux repères propres de $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ et $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ se déduisent donc l'un de l'autre par une rotation autour de la direction propre commune correspondant à l'unique valeur propre **positive**,
- en Mode II, de signature (+,+,-), on trouve symétriquement que les deux repères propres de $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ et $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ se déduisent l'un de l'autre par une rotation autour de la direction propre commune correspondant à l'unique valeur propre **négative**,
- en Mode frontière en déformation plane, frontière commune entre les Modes I et II, on trouve que les repères propres de $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ et $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$, sont nécessairement identiques.

Les conditions de compatibilité (2.10) peuvent alors être finalement analysées en terme de conditions algébriques sur les composantes de $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$, Annexe 1-5, et nous trouvons:

- en Mode I, de signature (+,-,-) – dans le repère propre de $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$, et pour tous les repères comprenant comme direction n°1, la direction propre portant l'unique valeur propre positive de $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$, le produit symétrique contracté des fluctuations locales doit être de la forme:

$$\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_{22} + c_{33} = 0 \\ c_{22} + \overline{\sigma_{2k}} \cdot \overline{\dot{\epsilon}_{k2}} \leq 0 \\ c_{33} + \overline{\sigma_{3k}} \cdot \overline{\dot{\epsilon}_{k3}} \leq 0 \\ c_{32} = c_{23} \end{cases} \quad (2.12 \text{ a})$$

- en Mode II, de signature (+,+,-) – dans le repère propre de $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$, et pour tous les repères comprenant comme direction n°3, la direction propre portant l'unique valeur propre négative de $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$, le produit symétrique contracté des fluctuations locales doit être de la forme:

$$\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_{11} + c_{22} = 0 \\ c_{11} + \overline{\sigma_{1k}} \cdot \overline{\dot{\epsilon}_{k1}} \geq 0 \\ c_{22} + \overline{\sigma_{2k}} \cdot \overline{\dot{\epsilon}_{k2}} \geq 0 \\ c_{21} = c_{12} \end{cases} \quad (2.12 \text{ b})$$

- en Mode frontière en déformation plane, dans le repère propre de $\underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$, le produit symétrique contracté des fluctuations locales doit être en même temps de la

forme trouvée pour le Mode I et de la forme trouvée pour le Mode II, donc

$$\bar{\pi}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12c),$$

qui demeure valide dans tout référentiel.

Ces conditions nécessaires et suffisantes, constituent les conditions de compatibilité recherchées, en ce qui concerne l'hétérogénéité des contraintes et des vitesses de déformation. Observons que ces conditions nécessaires et suffisantes, constituent une extension tensorielle partielle de la Condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel.

En mode de déformation tridimensionnel (Mode I ou Mode II au sens strict) elles définissent une **structure anisotrope dans les fluctuations locales** dues à l'hétérogénéité : les conditions ne sont pas identiques suivant les directions de l'espace. Ce n'est qu'en Mode frontière en déformation plane, que ces conditions deviennent isotropes. Contrairement aux conditions de compatibilité pour l'hétérogénéité des actions intérieures (section 1.1), nous trouvons ici des restrictions supplémentaires, par rapport aux conditions résultant de la dissipation minimale, ces restrictions supplémentaires portent sur les covariances entre fluctuations locales en contraintes et en vitesses de déformation.

Si nous revenons à l'analyse du cas coaxial à repère fixe (section 2.1.3.), nous constatons que la condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel, qui doit être réalisée à l'échelle macroscopique, impose qu'à partir d'une certaine échelle, la corrélation interne des termes isotropes corrélés, pourtant acceptable par l'équation de dissipation d'énergie, doit disparaître dans l'hétérogénéité.

Ceci suggère qu'il pourrait y avoir plusieurs échelles dans l'hétérogénéité, en reprenant les différents termes de la section 2.1.3.:

- dès la "petite échelle", les termes anisotropes doivent être décorrélés;
- jusqu'à une certaine échelle intermédiaire, les termes isotropes peuvent demeurer corrélés;
- à partir de cette échelle intermédiaire, la corrélation interne de ces termes isotropes doit disparaître.

2.2.4 Causes physiques directes

Ce constat pose la question des causes physiques qui pourraient expliquer une telle indépendance entre hétérogénéités en contraintes et hétérogénéités en vitesses de déformations, à partir d'une certaine échelle. Une cause physique vraisemblable apparaîtra plus loin au Chapitre 5 (section 5.5), tirée de l'analyse des structures internes des bandes de localisation, et celle des chaînons de contraintes.

Cette analyse montre que si les bandes de localisation peuvent s'exprimer à l'échelle macroscopique, par contre les conditions particulières qui encadrent les chaînons de contraintes :

- d'une part en rendent secondaire le terme d'hétérogénéité isotrope (au sens de la section 2.1.3), sous l'effet de la *condition d'équilibre statique*;

- et d'autre part empêchent leur expression à l'échelle macroscopique, et les confinent à une plus petite échelle, sous l'effet de la *condition du Critère de Rupture*.

Cet effet de séparation d'échelle, implique qu'en choisissant un *volume élémentaire représentatif* suffisamment grand pour définir contraintes et vitesses de déformations macroscopiques:

- les seules hétérogénéités significatives qui subsistent à l'échelle macroscopique concernent les seules déformations (bandes de localisation);
- les fluctuations locales en contraintes pouvant éventuellement subsister à une telle échelle, constituent des structures faibles comparativement à celles des déformations, et de nature différente;
- d'où des termes de covariances faibles par rapport aux produits des valeurs moyennes, d'où $\overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})} \approx \overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}$.

Soulignons que les conditions d'équilibre statique jouent aussi un rôle clé dans la démonstration directe du lemme de Hill (qui implique simplement l'égalité des *Traces* de $\overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}$).

Cette indépendance relative entre les hétérogénéités en déformation et celles en contraintes, correspond aussi à un résultat acquis par les simulations numériques de milieux discrets (voir en particulier [16]-Chapitre 1) sur la transmission des efforts intérieurs au cours du mouvement:

- la transmission des efforts de contact est de nature bimodale, elle se partage entre un "réseau fort" de chaînons de forces, fortement anisotrope, qui supporte l'essentiel du cisaillement (en traits forts sur la Figure 2-4); et un "réseau faible", quasi-isotrope, qui semble jouer un rôle de contrefort pour le réseau fort (en traits fins sur la Figure 2-4);
- "la dissipation par frottement est presque totalement localisée dans la phase faible.."([16]);
- ce qui signifie que les mouvements concentrés aux contacts, ne sont pas directement corrélés aux fortes concentrations d'efforts de contact.

Condition suffisante isotrope

Dans les conditions précédentes (section 2.2.3), les deux tenseurs $\overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}$ ont même Trace et même Norme, ils ont au moins une valeur propre commune ainsi que la direction propre correspondante; ils sont donc voisins, mais pas complètement identiques, car leur écart, le tenseur $\overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}$, n'est généralement pas tout à fait nul, sauf pour le Mode frontière en déformation plane .

Une condition suffisante plus simple, mais plus restrictive , peut être trouvée en posant que la condition trouvée plus haut en déformation plane (2.12 c), soit vérifiée par tous les Modes de dissipation minimale: $\overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})} = 0$.

Cette condition revient à poser que dans tous les cas, les sommes de covariances croisées sont nulles, c'est à dire que ces covariances sont antisymétriques: $Covar\{\boldsymbol{\sigma}(\bar{i}), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{j})\} + Covar\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{i}), \boldsymbol{\sigma}(\bar{j})\} = 0$. Cette condition suffisante revient aussi à

poser qu'à partir d'une certaine échelle, les écarts entre $\underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}})$ et $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ deviennent négligeables, et donc que les deux tenseurs deviennent identiques, et ont toutes leurs directions propres communes.

Cette condition suffisante est la généralisation tensorielle *complète* de la condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel.

Nous montrerons directement au Chapitre 3 que des bandes de localisation établies, lorsqu'elles deviennent stationnaires (et donc à volume spécifique stationnaire dans le milieu) tendent vers la déformation plane; il s'ensuit que lorsque des bandes de localisation s'établissent, l'hétérogénéité tend vers les conditions (2.12 c).

Par une méthode complètement différente de celle du Chapitre 3, l'analyse des causes physiques détaillée au Chapitre 5 (section 5.5) suggère qu'il est vraisemblable que dans des structures d'hétérogénéité établies, telles des bandes de localisation bien formées, cette condition suffisante soit effectivement vérifiée.

2.3 CONCLUSIONS SUR LA COMPATIBILITE AVEC L'HETEROGENEITE EN CONTRAINTES ET EN VITESSES DE DEFORMATION

Les conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité détaillées plus haut (section 2.2.3), et qui ont un fondement physique, indiquent un comportement qui dépend du type de mouvement. En effet ce comportement dépend du Mode de dissipation minimale rencontré dans le domaine (rappelons que l'on ne peut pas rencontrer en même temps le Mode I et le Mode II dans un domaine en dissipation minimale, c'est la propriété d'exclusivité des Modes [17]).

Ce constat est à rapprocher du concept de *zone tensorielle*, développé et mis en oeuvre depuis longtemps sur des bases phénoménologiques, dans les modèles "incrémentaux" de comportement mécanique [22]. Ici, cette notion apparaît naturellement, car les Modes de dissipation minimale, issus de la physique du mouvement dans le discontinu, se distinguent par leur *signature*, qui correspond précisément au concept de zone tensorielle.

Ces conditions nécessaires et suffisantes conservent 2 degrés de liberté sur 6 dans les composantes du tenseur symétrique $\overline{\underline{\pi}}(\tilde{\underline{\sigma}}, \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}})$, pour les mouvements généraux tridimensionnels. Ceci laisse libre un certain degré de covariance entre fluctuations locales dans les efforts intérieurs (contraintes), et fluctuations locales dans les mouvements intérieurs (déformations).

La condition suffisante présentée en section 2.2.4, est nettement plus simple, tout en coïncidant avec les conditions précédentes pour le Mode frontière en déformation plane. L'identité des tenseurs $\underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}})$ et $\overline{\underline{\pi}}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})$ qui en découle, permet ensuite de déterminer complètement l'expression des vitesses de déformation du milieu continu équivalent, en fonction de grandeurs microscopiques du discontinu [17]. Toutefois elle est plus restrictive : les composantes du tenseur $\overline{\underline{\pi}}(\tilde{\underline{\sigma}}, \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}})$ n'ont plus aucun degré de liberté. Par ailleurs, elle présente l'inconvénient de faire disparaître

une source possible (ce n'est pas la seule) de structures anisotropes dans l'hétérogénéité, en mouvement tridimensionnel. Or des expérimentations fines ont montré depuis longtemps que la déformation dans ces milieux provoque l'apparition d'une certaine anisotropie induite [23],[24],[25].

Vérification "expérimentale" éventuelle

En conclusion, seule la simulation numérique détaillée de milieux discrets constitués de granulats virtuels réalistes, pourrait permettre:

- d'abord d'évaluer à partir de quelle échelle les conditions précédentes sont effectivement remplies;
- ensuite de départager entre cette condition suffisante, et les conditions précédentes nécessaires et suffisantes;
- notons que pour être complètement déterminante, cette vérification devra être faite en tridimensionnel vrai, car les conditions s'avèrent identiques en déformation plane (*au voisinage de la dissipation minimale..*).

Dans les développements qui suivent, nous considèrerons que les conditions nécessaires et suffisantes (2.12) sont vérifiées.

Dans ce cadre, les résultats de l'Approche Energétique sont donc applicables aussi bien aux grandeurs macroscopiques moyennes, qu'aux grandeurs locales, en ce qui concerne les contraintes et les taux de déformation.

3 ORIENTATION DES BANDES DE LOCALISATION ET DES CHAINONS DE CONTRAINTES

L'Approche Energétique a montré [17] que dans les Modes de dissipation minimale, les orientations des vecteurs vitesses (relatives) de glissement aux contacts élémentaires, ainsi que les directions des forces de contact qui s'y exercent, ne sont pas quelconques, du fait de la polarisation des actions intérieures:

- en Mode I, de signature (+,-,-), les tenseurs élémentaires des actions de contact, ainsi que le tenseur des actions intérieures, ont en commun la direction propre portant l'unique valeur propre positive; il en résulte, du fait de la configuration des tenseurs élémentaires, que tous les vecteurs vitesses de glissement font un angle de $\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$ avec cet axe commun, et que pour chacun des contacts actifs, la directions de la force de contact est symétrique de celle de la vitesse de glissement, par rapport à cet axe;
- en Mode II, de signature (+,+,-), les tenseurs élémentaires des actions de contact, ainsi que le tenseur des actions intérieures, ont en commun la direction propre portant l'unique valeur propre négative; il en résulte, du fait de la configuration des tenseurs élémentaires, que tous les vecteurs vitesses de glissement font un angle de $\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}$ avec cet axe commun, et que pour chacun des contacts actifs, la directions de la force de contact est symétrique de celle de la vitesse de glissement, par rapport à cet axe;
- en Mode frontière en déformation plane, de signature (+,0,-) les tenseurs élémentaires des actions de contact, ainsi que le tenseur des actions intérieures, ont en commun les trois directions propres, il en résulte que les deux propriétés précédentes sont vérifiées simultanément.

Considérant alors une bande de localisation comme une zone de concentration de ces mouvements de glissements élémentaires, associés à des mouvements locaux qui produisent les variations de volume, nous pouvons analyser la direction correspondante de la bande de localisation ainsi que celle des forces qui s'y exercent. Au cours d'une sollicitation monotone sous contraintes modérées, les matériaux granulaires ont généralement tendance à se dilater en volume. Cette tendance à la dilatation sous cisaillement croissant, désignée par "dilatance" (*dilatancy*) depuis les travaux de O.Reynolds sur le sujet (1885), se poursuit jusqu'à atteindre un régime stationnaire, où le volume spécifique devient stationnaire malgré la continuation du mouvement, c'est "l'état critique" (*dont la définition remonte à 1936, par A.Casagrande*).

Dans ce qui suit, nous commencerons l'analyse de la direction des bandes de localisation et chaînons de forces actifs, dans le cas le plus simple: celui de l'"état critique", lorsque le le volume spécifique devient stationnaire au cours du mouvement.

3.1 MOUVEMENTS A VOLUME STATIONNAIRE

Dans un mouvement à volume stationnaire, la bande de localisation est en condition de cisaillement à volume stationnaire, c'est à dire de cisaillement simple. Elle peut donc être schématisée comme une surface de quasi-discontinuité séparant deux masses qui ne se déforment pratiquement pas dans le mouvement, ce que confirmera la structure interne détaillée plus loin (Section 4). A condition qu'il n'y ait pas d'échange significatifs de matière au travers de cette surface, entre les deux masses "gelées dans le mouvement", ce qui semble conforme à l'expérience, la quasi-discontinuité devient donc une surface de cisaillement simple concentré, c'est à dire une surface de glissement tangentiel.

Pour cette surface, le flux d'énergie mécanique, donné par le tenseur des actions intérieures appliqué à la normale, doit être purement tangentiel, car la vitesse de glissement y est tangentielle, et les masses extérieures à la bande de localisation n'absorbent pas d'énergie mécanique (elles ne se déforment pas).

3.1.1 Orientation de la surface de localisation

Comme par ailleurs, les orientations des glissements élémentaires sont définies dans les Modes de dissipation minimale, la surface recherchée doit donc à la fois:

- présenter en chacun de ses points une orientation matérielle correspondant aux orientations des glissements élémentaires dans le Mode de dissipation minimale qui prévaut dans le domaine;
- présenter en chacun de ses points un flux d'énergie mécanique, au sens des actions intérieures, purement tangentiel.

L'examen des différents Modes, Annexe 3-1, montre que cette double condition ne peut être réalisée qu'en Mode de déformation plane, par des surfaces localement planes, dont la direction est celle des lignes de glissement des équilibres limite de Rankine, à $\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$ de la direction principale portant la puissance reçue π^+ (axe principal "majeur").

Remarquons que cette propriété, qui résulte seulement de la structure des actions intérieures, est complètement indépendante des questions de coaxialité.

Les surfaces de localisation coniques, trouvées par tomographies sur des "essais triaxiaux", qui sont en Mode I (voir [6] et [7]), doivent donc s'interpréter comme des *enveloppes* de mouvements locaux en déformation plane, qui ne sont pas nécessairement simultanés, distribués par rotation autour de l'axe portant la direction de π^+ .

3.1.2 Orientation des chaînes de contraintes actifs, dans la bande de localisation

Parmi les forces transmises dans la bande de localisation, certaines ne participent pas à la dissipation d'énergie, car les contacts sur lesquels elles s'exercent ne glissent pas, tandis que d'autres y participent, que nous désignerons par "forces actives", dont nous recherchons l'orientation.

Le rapprochement de l'orientation de la bande de localisation avec ce que nous avons vu plus haut des Modes de dissipation minimale, fournit une première réponse, en tenant compte du fait que le domaine est en déformation plane: les forces actives étant symétriques des vitesses de glissement, par rapport à l'axe portant π^+ , l'orientation des chaînes de contraintes actifs est symétrique de l'orientation de la surface de localisation, par rapport à l'axe portant π^+ .

Une deuxième réponse est apportée directement par l'analyse globale des conditions d'équilibre sur la surface de localisation (Annexe 3-2), qui montre que *la direction des chaînes de forces actives ne peut être autre que celle déterminée plus haut.*

Remarquons ici aussi, que cette orientation des chaînes de contraintes actifs, est encore indépendante de toute considération de coaxialité.

3.1.3 Conclusion sur les mouvements à volume stationnaires

Les résultats précédents peuvent être résumés par le schéma simple de la Figure 3-1.

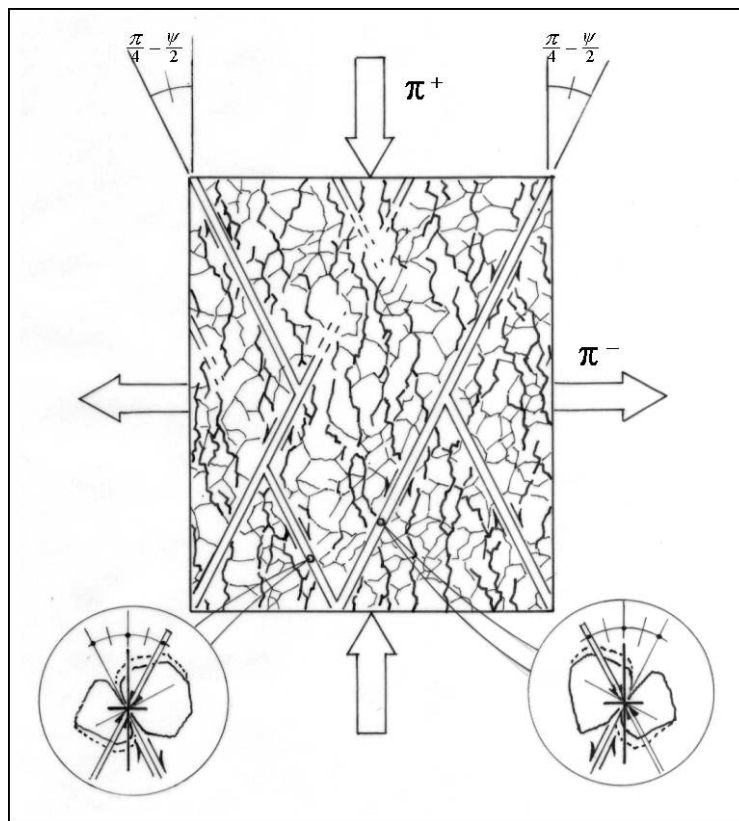


Figure 3-1 Orientations dans les mouvements à volume stationnaire

3.2 MOUVEMENTS A VOLUME VARIABLE

Pour étudier la direction des bandes de localisation lorsque le volume spécifique ne peut être considéré comme stationnaire, il devient nécessaire de rentrer dans l'analyse des micromécanismes donnant naissance à la dilatance dans les bandes.

Par ailleurs, la dilatance est souvent caractérisée par un paramètre commode, "l'angle de dilatance", que nous noterons ici δ , défini depuis 1960 par Hansen & Lundgren (voir [26]) pour les mouvements en déformation plane (avec $\dot{\epsilon}_2 = 0$):

$$\delta = -\arcsin\left(\frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{|\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3|}\right)$$

Nous restreindrons de ce fait l'analyse aux mouvements en déformation plane, correspondant aux essais de laboratoire de type "essais biaxiaux", et autres appareils de déformation plane avec ou sans rotations d'axes, et nous analyserons 2 types de micromécanismes:

- le cisaillement avec dilataance par **séparation** des granulats;
- le cisaillement avec dilataance par **basculement** des granulats.

Nous montrerons que:

- pour le premier micromécanisme, qui correspondrait plutôt à des granulats aplatis, anguleux et rugueux, l'orientation des bandes dépend clairement de la dilataance;
- pour le deuxième micromécanisme, qui correspondrait à des granulats plus globuleux, arrondis et lisses, l'orientation de la bande n'en dépend pratiquement pas.

Enfin, nous verrons par l'analyse de résultats publiés dans la littérature, que les données disponibles suggèrent (pour les matériaux ayant donné ces résultats) une prédominance des mouvements du 2ème type.

3.2.1 Mouvements de dilataance par séparation

Dans ce mouvement, largement repris depuis une publication de De Josselin de Jong (1976), la surface de cisaillement instantannée est en dents de scie, séparant deux masses de matériau qui se comportent momentanément comme deux corps rigides. Les deux amas granulaires glissent l'un par rapport à l'autre sur cette surface en dents de scie, et la dilataance globale résulte des mouvements de séparation locaux, Figure 3-2-a). La vitesse relative des deux masses séparées par cette surface de cisaillement, a la même direction que celle des glissements, et l'analyse de la cinématique du mouvement (cf. par exemple[15]) indique que cette vitesse relative fait un angle avec la direction moyenne de la surface de cisaillement, précisément égal à δ , Figure 3-2-a).

Nous avons déjà vu que les glissements locaux ont une inclinaison de $\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$ par rapport à la direction principale portant π^+ .

Il s'ensuit donc que la direction moyenne d'une bande de localisation formée par un ensemble de telles surfaces de cisaillement, aura par rapport à la direction principale portant π^+ , une inclinaison de $\theta_{\text{Sépar}} \approx \pi/4 - \psi/2 - \delta$, Fig. 3-2-b.

Remarquons que dans ce type de mouvement, l'augmentation de volume résulte de la séparation de surfaces initialement en contact, et cette séparation se fait suivant une direction bien précise, celle des glissements, qui sont *polarisés*. Dans ce sens, nous pouvons dire que, pour ce type de mouvement, la dilataance est *polarisée*.

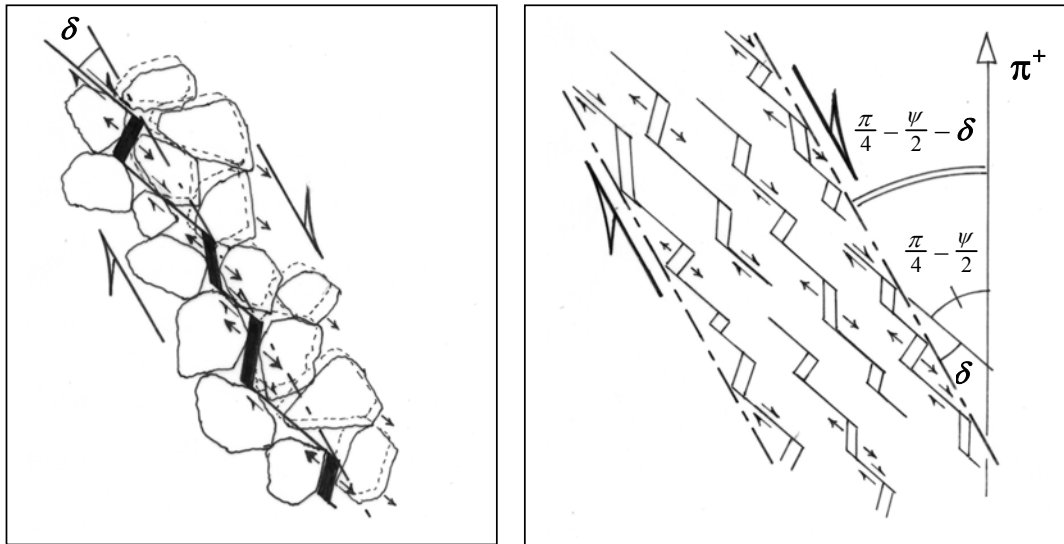


Figure 3-2 *Mouvements de cisaillement avec dilatance par séparation.*
 a) Mécanisme élémentaire
 b) Mouvement d'ensemble dans une bande de localisation

3.2.2 Mouvements de dilatance par basculement

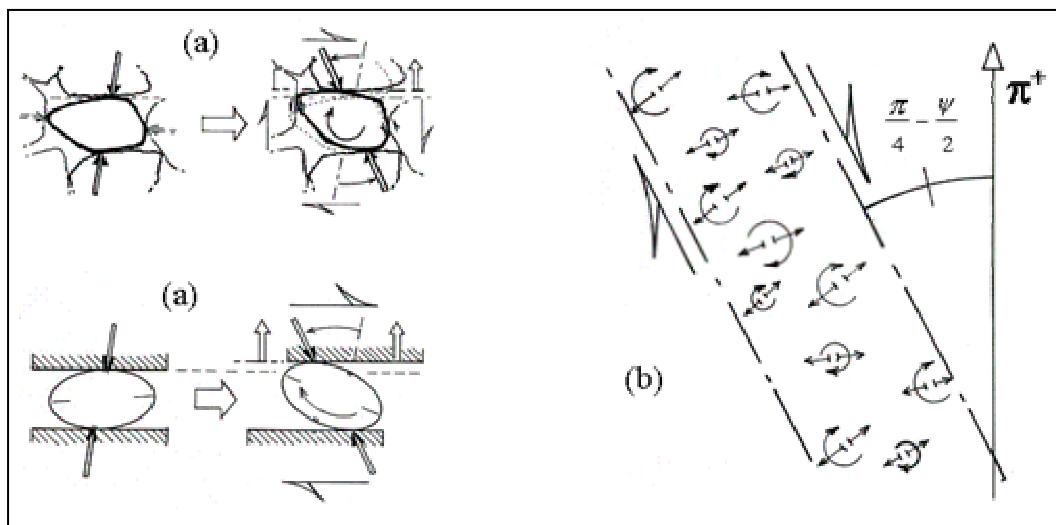
Cet autre type de mouvement peut être associé à l'évolution des réseaux de chaînes de forces au cours de la sollicitation, lorsque se développent les efforts de cisaillement. Considérons un granulat traversé par un un chaînon de forces de forte intensité (chaînon du "réseau fort"), et par des chaîbons de forces de faible intensité (chaîbons du "réseau faible"):

- l'équilibre statique du granulat se trouvera conditionné en premier lieu par la configuration des forces du chaînon du réseau fort, dont on sait (voir [16], déjà commenté en section 2.2.4) qu'il supporte l'essentiel des cisaillements, les chaîbons du réseau faible jouant le rôle de stabilisateurs transversaux;
- une modification significative de l'obliquité des forces transmises par le chaînon du réseau fort, amènera un mouvement du granulat, nécessaire pour trouver une nouvelle position d'équilibre; pour une forme convexe, un tel mouvement est un basculement Figure 3-3, a), et qui s'accompagne d'une variation locale de volume;
- lorsque se développent les efforts de cisaillement macroscopiques, le développement local de l'obliquité des forces suivant les chaîbons du réseau fort, est ainsi associé à des mouvements de basculement des granulats, jusqu'à atteindre la limite de friction sur le chaînon fort, ce qui déclenche alors le glissement.

Remarquons que dans une bande de localisation formée par la concentration de mouvements de ce type Figure 3-3-b) :

- tant que les basculements de granulats se font **sans** glissements significatifs aux contacts du réseau fort, ces mouvements ne participent à la dissipation d'énergie que par les mouvements associés qui sont situés sur les contacts du réseau faible, dont la distribution n'a pas de rapport immédiat avec celle du réseau fort, et n'ont

- de ce fait aucune raison de produire des effets polarisés; la dilatance associée à de tels basculements est diffuse, elle n'est pas attachée à une direction particulière;
- lorsque les basculements de granulats finissent par se faire **avec** glissements significatifs aux contacts du réseau fort, ces glissements sont polarisés, toutefois de tels mouvements sont relativement peu fréquents, ils correspondent à la rupture d'un chaînon du réseau fort, avec "crise dynamique" locale, redistribution des forces sur le voisinage, et recomposition des réseaux forts et faibles; la dilatance associée aux basculements correspondants, s'est faite pour l'essentiel **avant** un tel glissement, et elle est plutôt transversale par rapport aux directions de tels glissements; cette dilatance transversale, qui affecte la vitesse de déplacement relative de part et d'autre de la bande, n'a cependant pas d'effet sur l'orientation de la bande par rapport aux glissements: la bande demeure parallèle aux glissements;
 - enfin, sous un même tenseur global des actions intérieures, suivant que le cisaillement dans la bande est *dextre* ou *senestre*, les rotations de granulats correspondant à ce micromécanisme (*indépendamment des rotations liées à l'éventuelle réorientation des axes d'anisotropie du milieu*) seront négatives ou positives; si un tel mécanisme de dilatance est prédominant, on doit donc trouver dans les expérimentations ou simulations numériques des rotations significatives dans les deux sens (positives, ou négatives), dont les moyennes dans les deux sens doivent être du même ordre de grandeur (moyenne des rotations positives \approx -moyenne des rotations négatives);



a) Mouvement élémentaire.

b) Mouvement d'ensemble.

Figure 3-3: Mouvements de cisaillement avec dilatance par basculement

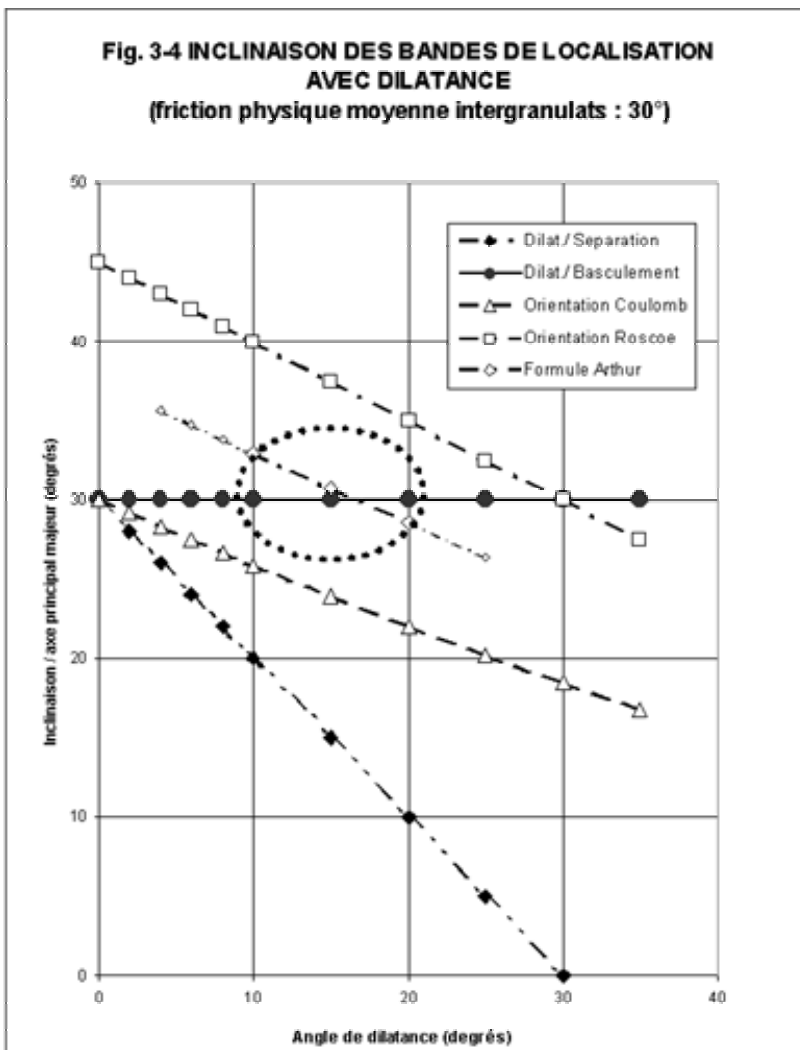
Nous trouvons donc ici : $\theta_{\text{Bascule}} \approx \pi/4 - \psi/2 = \theta_0$

Confrontation avec les résultats expérimentaux publiés

Le diagramme de la Figure 3-4 , calculé pour une valeur de friction physique moyenne entre granulats de $\psi = 30^\circ$ (qui correspond à des grains siliceux moyennement rugueux et moyennement arrondis, largement prédominants parmi les

matériaux utilisés en laboratoire- voir [27]), regroupe les valeurs de l'inclinaison des bandes de localisation, en fonction de la dilataance, suivant diverses approches:

- les deux types de mouvements analysés précédemment, dilataance par séparation et dilataance par basculement;



- l'orientation dite “de Coulomb”, qui assimile la bande de localisation à une direction statique d'obliquité maximale des contraintes, et relie l'orientation de la bande au “frottement interne” : $\theta_{\text{Coulomb}} = \pi/4 - \phi/2$, dont la relation avec nos grandeurs physiques ψ et δ est explicitée en Annexe 2-3;

- l'orientation dite “de Roscoe” (1970, [28]) qui assimile la bande de localisation à une direction cinématique d'extension nulle: $\theta_{\text{Roscoe}} = \pi/4 - \delta/2$;

- la formule empirique d'Arthur (1977, [29] et [30]) : $\theta_{\text{Arthur}} = \pi/4 - (\phi + \delta)/4$, qui résulte de la moyenne entre les orientations de Coulomb et de Roscoe, trouvée par son auteur comme “best fit”

sur un ensemble de mesures dans lesquelles l'angle de dilataance se trouvait compris entre 10 et 20° environ (zone elliptique en pointillés sur le diagramme).

Ce diagramme montre que la sensibilité de l'orientation dite “de Coulomb” vis à vis de la dilataance, s'avère très sensiblement linéaire, avec un coefficient de sensibilité

$\frac{\Delta\theta}{\Delta\delta} \approx -0,4$. Il en est donc de même avec l'orientation donnée par la formule

d'Arthur, avec un coefficient de sensibilité de $-0,45$

Les résultats publiés dans la littérature sur ce sujet indiquent, suivant les auteurs:

- pour I. Vardoulakis et al. (1985, [26]), la meilleure approximation serait donnée par la formule empirique d'Arthur;
- pour P.A.Vermeer (1990, [30]) “toutes les orientations dans la gamme Roscoe-Coulomb se révèlent admissibles”, la granulométrie des matériaux paraissant— pour ses données— un paramètre-clé;

- les mesures de Desrues, citées par Pastor-Perez (1993, [13]) se rapprochent plutôt de l'orientation dite "de Coulomb",
- les mesures récemment publiées par Alshibli, Batiste et Sture (2003, [7]), indiquent que, pour un confinement modéré (100 kPa), ce coefficient de sensibilité vis à vis de l'angle de dilatance est de l'ordre de $-0,4$, tandis que sous très faible confinement (15 kPa) la sensibilité serait plus forte, avec un coefficient de l'ordre de $-0,7$.

Par rapport à notre analyse par les micromécanismes, ces résultats expérimentaux suggèrent une large prédominance des mouvements de type dilatance par basculement, avec une faible proportion de mouvements de type dilatance par séparation, *tout au moins dans les résultats expérimentaux disponibles*, relatifs à des matériaux d'usage courant en laboratoire.

Il est vraisemblable que les proportions respectives des mouvements des deux types dans le mouvement global, dépendent du type de matériau granulaire et de sa structure interne, et aussi du degré d'avancement de la déformation:

- pour des matériaux orientés et très serrés, formés de granulats dont la morphologie rend difficile la rotation au sein du matériau d'une part, et d'autre part permet les mouvements de séparation (*ce qui suppose la possibilité de coincement des granulats dans le matériau en mouvement*), les mouvements de dilatance par séparation simple seraient plutôt prédominants; c'est ce que l'on observe dans les déformations de massifs de "maçonnerie sèche" construits en pierres sèches aplaties (cisaillements avec ouvertures de fissures en escalier);
- pour des matériaux sans structure orientée forte, formés de granulats à morphologie plutôt globuleuse, tels des graviers roulés alluvionnaires, ou des galets de plage, en forme de dragées, le mouvement prédominant serait plutôt celui de la dilatance par basculement;
- enfin lorsqu'un milieu initialement orienté et serré, est suffisamment déformé pour effacer l'orientation initiale et desserrer significativement le milieu, il est possible que les proportions respectives des deux micromécanismes de dilatance dans le mouvement global, évoluent avec la déformation (dans un milieu lâche et déstructuré, le basculement est plus vraisemblable que la séparation).

Observons aussi que:

- les mouvements de glissement/basculement présentent un degré supérieur dans la discontinuité, par rapport aux mouvements de glissement/séparation; en effet les premiers présentent non seulement des glissements de contacts et une augmentation du volume de vides par écartement de surfaces granulaires en regard, comme les seconds, mais ils présentent en plus une rotation significative des granulats, qui diffère d'un granulat à l'autre;
- le modèle simplifié de glissement/basculement présenté en Figure 3-3 a) et b), explique naturellement comment la dilatance peut s'arrêter pour laisser la place au glissement à volume stationnaire, évolution caractéristique des matériaux granulaires sous charge, tandis que le modèle de mouvement de glissement/séparation ne porte pas naturellement une telle explication (*il faut faire*

intervenir l'instabilité des zones de séparation lorsque les vides deviennent trop grands);

- le modèle simplifié de glissement/basculéme nt présenté ici explique comment peut se développer la polarisation qui, d'après l'Approche Energétique, prend place progressivement dans le milieu, dont le mouvement doit tendre vers un mouvement de dissipation minimale;
- les mouvements de glissement/basculéme nt expliquent aussi pourquoi, lorsque l'on inverse le mouvement après une sollicitation monotone, il suffit d'un faible déplacement en relâchement, pour provoquer une chute brutale de l'effort de cisaillement, accompagnée d'une contraction très rapide du volume du milieu (on a observé de telles contractions volumétriques jusqu'à 4% , voire davantage): les mouvements de basculements mettent en place dans le matériau sous charge, des structures dont la stabilité est fortement dissymétrique, ces structures présentent une stabilité certaine vis à vis de la poursuite du mouvement qui les a engendrées, tandis qu'elles sont très peu stables vis à vis d'une inversion du mouvement;

Soulignons que ces caractères particuliers du micromécanisme de dilatance par glissement/basculéme nt analysés ici, correspondent aussi aux observations fines publiées par M.Oda et H.Kazama sur les mouvements granulaires dans les bandes de cisaillement (1998 [8]).

Par ailleurs, ce micromécanisme profondément discontinu, explique la contradiction apparente qui fait que suivant les cas, les bandes de localisation aient pu être considérées comme des surfaces caractéristiques statiques (obliquité maximale des contraintes, orientation de Coulomb), ou comme des surfaces caractéristiques cinématiques (surface d'extension nulle, orientation de Roscoe) . Cette contradiction résulte d'un paradoxe de représentation, inhérent à la représentation d'un milieu fortement discontinu, dont les mouvements intérieurs locaux sont complètement dissymétriques, par un schéma continu équivalent dans lequel les mouvements intérieurs sont représentés par un tenseur symétrique.

En effet:

- l'image régulière et ordonnée d'un tenseur symétrique des vitesses de déformation, repose implicitement sur une distribution des mouvements résultant d'un champ de vitesses continu et différentiable; la compatibilité des déformations, conséquence du continu, s'y exprime par des équations différentielles; en deux points voisins, les mouvements élémentaires sont également voisins;
- la distribution des mouvements réels résulte d'une myriade de discontinuités franches de divers ordres (*glissements, séparations, rotations*); la compatibilité des mouvements, conséquence du discontinu, y est assurée par la présence de vides répartis dans tout le matériau; en deux points voisins, les mouvements élémentaires peuvent être totalement différents.

Ce paradoxe de représentation est particulièrement apparent dans les mouvements à volume stationnaire en déformation plane:

- pour le schéma continu équivalent, les mouvements sont des glissements simples suivant deux familles de facettes perpendiculaires, et qui ne peuvent être toutes

deux en même temps facettes d'obliquité maximale pour les contraintes (*sauf comportement "parfaitement plastique", ce qui n'est pas le cas ici*) ;

- pour l'amas granulaire discontinu dans l'Approche Energétique, les mouvements sont aussi des glissements, mais suivant deux familles de facettes orientées à $\frac{\pi}{2} - \psi$ l'une de l'autre, et qui sont en même temps facettes d'obliquité maximale pour les efforts intérieurs.

3.2.4 Conclusions sur les mouvements à volume variable

Bien que d'autres micromécanismes de déformation, dont l'analyse systématique reste à faire, contribuent probablement aux mouvements, l'analyse des micromécanismes faite ici et la confrontation aux données expérimentales, suggèrent que l'influence de la dilatance sur l'orientation des bandes de localisation est généralement faible à modérée.

Une raison physique de fond milite dans ce sens; nous verrons en effet dans le chapitre suivant que la structure interne dans la bande de cisaillement fait coexister:

- une zone axiale de cisaillement maximal, d'intensité telle que l'"état critique" y est rapidement atteint, ce qui implique que cette zone axiale se trouve en cisaillement sans dilatance;
- des bords où l'intensité du cisaillement s'atténuant rapidement avec la distance, on doit admettre que l'"état critique" n'y est atteint que plus lentement, et donc qu'une certaine dilatance y subsiste longtemps.

Si l'orientation de la bande était étroitement liée à la dilatance, avec une dépendance forte, cette structure interne déterminerait des orientations différentes pour la bande, entre la zone axiale et les bords de la bande, résultant en une contradiction cinématique.

Cette contradiction tombe d'elle-même si l'on admet que l'influence de la dilatance sur cette orientation, est plutôt secondaire. Enfin, lorsque la dilatance devient négligeable ($\delta \approx 0$), on doit retrouver l'orientation des bandes de localisation en mouvement à volume stationnaire ($\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$).

En première approximation, l'ensemble de ces résultats peut donc être résumé

par :

$$\theta \approx \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} - \alpha \delta \quad (3.1)$$

où α est un paramètre matériel, positif, généralement inférieur à 0,4.